Partiel de Traitement du Signal (1^{ère}TR).

Mercredi 5 Mai 2004, 8h00-10h00

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Echantillonnage

1) On considère un signal sinusoidal défini par $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, où $f_0 = 500Hz$ et A est une amplitude fixe. On échantillonne ce signal à la fréquence F_e. Déterminer et représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonne idéal noté $x_e(t)$ lorsque $F_e = 3kHz$ et $F_e = 600Hz$.
2) On désire restituer le signal d'origine $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de bande $[-F_e/2, F_e/2]$ c'est-à-dire de transmittance $H(f) = \Pi_{F_e}(f)$, avec la notation classique

$$\Pi_{F_e}(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad -\frac{F_e}{2} \leq f \leq \frac{F_e}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant les figures obtenues à la question précédente, donner l'expression du signal restitué noté $x_r(t)$ dans les deux cas $F_e = 3kHz$ et $F_e = 600Hz$. Rappeler l'expression de $x_r(t)$ obtenue par interpolation des points $x(kT_e), k \in \mathbb{Z}$ (appelée formule de reconstruction de Shannon).
3) De manière plus générale, on considère un signal périodique de période T_0 qui admet la décomposition en série de Fourier suivante

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$. Donner une condition sur les coefficients c_k permettant d'échantillonner le signal $x(t)$ en satisfaisant la condition de Shannon. Cette condition est-elle vérifiée pour le signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m(t - kT_0)$$

où $m(t) = \Pi_{2a}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| < a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et où a est une contante telle que $0 < a < \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2f_0}$?
4) On considère à nouveau le signal de la question 1) qui est observé sur une fenêtre de durée finie. On oberve alors le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\, \Pi_T(t)$$

Après avoir précisé la classe de signaux à laquelle appartient $y(t)$, déterminer sa transformée de Fourier $Y(f)$ et sa densité spectrale de puissance $s_Y(f)$. Représenter graphiquement $Y(f)$ et $s_Y(f)$.

Exercice 2 : Filtres Dérivateurs

Rq : cette partie est inspirée d'un exercice de l'examen du 22 novembre 2001 de l'ENSERG.

1) Soit $x(t)$ un processus aléatoire stationnaire (au sens large) de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $K_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f) = TF[K_x(\tau)]$. En utilisant l'isométrie fondamentale, montrer que la dérivée (en moyenne quadratique) de $x(t)$ notée $y(t) = x'(t)$ est le résultat du filtrage de $x(t)$ par un filtre (appelé filtre dérivateur) dont on précisera la fonction de transfert $H(f)$. Quelle est la réponse impulsionnelle de ce filtre ?

2) On suppose maintenant que $x(t)$ est un signal déterministe de transformée de Fourier $X(f)$. Retrouver très simplement le résultat de la question 1). Déterminer la sortie du filtre dérivateur lorsque $x(t) = u(t)$. Le filtre dérivateur est-il stable ?

3) On considère un filtre dérivateur à bande passante limitée $H_1(f) = H(f)\Pi_{2B}(f)$. Montrer que la réponse impulsionnelle de ce filtre est

$$h_1(t) = \frac{2B\cos(2\pi Bt)}{t} - \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t^2}$$

Est-il stable ? Comment peut-on réaliser un tel filtre ?

4) On considère finalement un filtre dérivateur à bande passante limitée de réponse impulsionnelle (tronquée) $h_2(t) = h_1(t)\Pi_T(t)$. On désire approcher cette réponse impulsionnelle par la sortie $e'(t)$ d'un filtre dérivateur idéal (de fonction de transfert $H(f)$) dont l'entrée est $e(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\Pi_T(t)$. Soit $\varepsilon(t) = e'(t) - h_2(t)$ l'erreur d'approximation. Montrer que $\varepsilon(t)$ s'écrit sous la forme

$$\varepsilon(t) = C(B,T)\left[\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

où $C(B,T)$ est une fonction qui ne dépend que de B et de T que l'on précisera. En déduire la transformée de Fourier de $\varepsilon(t)$ et montrer qu'elle est nulle si $BT \in \mathbb{N}$ (*Indication : on rappelle que* $\Pi_T(t) = u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)$, *où* $u(t)$ *est l'échelon de Heaviside*).

Exercice 3 : Filtre Exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp(X(t))$$

On suppose dans cet exercice que l'entrée du filtre est un bruit blanc (de moyenne nulle) Gaussien de variance σ^2.

1) Expliquer les termes **blanc** et **Gaussien.**

2) Déterminer $E[Y(t)]$ et $E[Y^2(t)]$.

Indication : on rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Z de loi gaussienne $N(0,\sigma^2)$ est :

$$m(u) = E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

3) Quelle est la densité de probabilité du couple $(X(t), X(t-\tau))$? En déduire que $Y(t)$ est un processus aléatoire stationnaire dont la fonction d'autocorrélation dépend uniquement de $K_X(\tau)$ et de σ^2.

4) En appliquant le théorème de Price, calculez la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de l'entrée notée $K_X(\tau)$ (on prendra soin de déterminer la constante intervenant lorsqu'on intègre l'équation différentielle liant $K_Y(\tau)$ et $K_X(\tau)$).