Partiel de Traitement du Signal

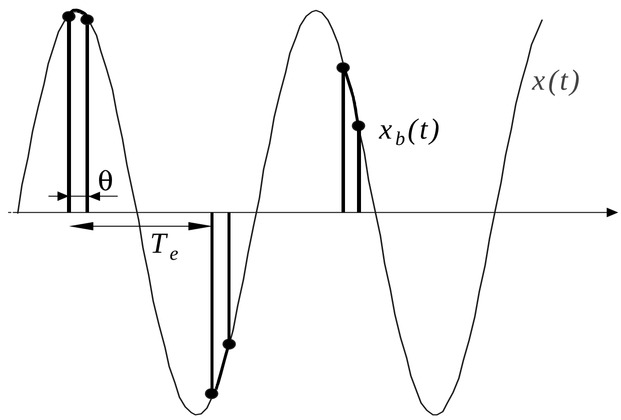
(Une feuille A4 recto-verso autorisée) 14 avril 2005, 8h-10h00

Exercice 1 : échantillonnage à porte analogique

On considère un signal déterministe $x(t)$ de transformée de Fourier à bande limitée $[-F_{\max}, F_{\max}]$.
1) Rappeler l'expression du signal $x_e(t)$ obtenu par échantillonnage idéal de $x(t)$ à la fréquence F_e. Déterminer la transformée de Fourier de $x_e(t)$ notée $X_e(f)$. Représenter cette transformée de Fourier lorsque $F_e > 2F_{\max}$ et

$$x(t) = F_{\max}\left[\frac{\sin(\pi F_{\max} t)}{\pi F_{\max} t}\right]^2.$$

2) On désire restituer le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de transmittance $H_r(f) = \Pi_{F_e}(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_r(t) = TF^{-1}[H_r(f)]$. Quelle est l'expression du signal restitué $x_r(t) = x_e(t) * h_r(t)$?
3) On considère désormais l'opération de blocage par produit représentée ci-dessous (le signal d'origine est en bleu et le signal bloqué par produit est en noir)



Exprimer le signal $x_b(t)$ comme le produit de $x(t)$ avec une somme de fonctions portes que l'on précisera. Déterminer alors la transformée de Fourier de $x_b(t)$. On suppose que la condition $F_e > 2F_{\max}$ est vérifiée. Qu'obtient-on lorsqu'on filtre le signal $x_b(t)$ par un filtre passe bas idéal de transmittance $H(f) = \Pi_{F_e}(f)$?

Exercice 2 : signal BLU

Le but de cet exercice est d'étudier le signal

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) - \widehat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

où $\widehat{m}(t)$ est la transformée de Hilbert de $m(t)$, c'est-à-dire la sortie d'un filtre linéaire invariant dans le temps d'entrée $m(t)$ et de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{\pi t}, t \neq 0$, θ est une phase déterministe ou aléatoire suivant le modèle choisi pour le message $m(t)$ et f_0 est une fréquence fixe telle que $f_0 > 0$.

• $1^{ère}$ **partie : étude du filtre de Hilbert**

1) Montrer que la transmittance du filtre de Hilbert est

$$H(f) = -jsign(f) = \begin{cases} -j \text{ si } f > 0 \\ 0 \text{ si } f = 0 \\ j \text{ si } f < 0 \end{cases}$$

2) Déterminer la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance de $\widehat{m}(t)$ en fonction de la densité spectrale, fonction d'autocorrélation et puissance de $m(t)$ notées respectivement $s_m(f), R_m(\tau)$ et P_m.

3) En utilisant la formule des interfèrences, déterminer les fonctions d'intercorrélations $R_{m\widehat{m}}(\tau)$ et $R_{\widehat{m}m}(\tau)$ en fonction de $s_m(f)$, où $R_{m\widehat{m}}(\tau)$ est la fonction d'intercorrélation entre $m(t)$ et $\widehat{m}(t)$ et $R_{\widehat{m}m}(\tau)$ est la fonction d'intercorrélation entre $\widehat{m}(t)$ et $m(t)$.

• $2^{ème}$ **partie :** $m(t)$ **déterministe**

On suppose dans cette $2^{ème}$ partie que $m(t)$ est un message déterministe réel de transformée de Fourier $M(f)$ à bande limitée $[-F_{\max}, F_{\max}]$. On notera $M^+(f)$ et $M^-(f)$ les parties du spectre de $m(t)$ associées aux fréquences positives et négatives, i.e. $M(f) = M^+(f) + M^-(f)$ avec

$$M^+(f) = \begin{cases} M(f) \text{ si } f > 0 \\ 0 \text{ si } f < 0 \end{cases} \text{ et } M^-(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } f > 0 \\ M(f) \text{ si } f < 0 \end{cases}$$

. On suppose également que θ est une phase déterministe et pour simplifier on choisira $\theta = 0$ (les résultats changeraient très peu pour $\theta = \theta_0 \neq 0$).

1) Exprimer la transformée de Fourier de $\widehat{m}(t)$ notée $\widehat{M}(f)$ en fonction de $M^+(f)$ et $M^-(f)$.

2) Déterminer la transformée de Fourier de

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) - \widehat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

en fonction de $M^+(f), M^-(f)$ et f_0. En faisant un dessin, montrer comment le spectre de $m(t)$ est modifié par la transformation ci-dessus.

3) Application : déterminer la transformée de Fourier de $x(t)$ lorsque $m(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ avec $f_1 > 0$.

• $3^{ème}$ **partie :** $m(t)$ **aléatoire**

On suppose dans cette $2^{ème}$ partie que $m(t)$ est un message aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_m(f)$ à bande limitée $[-F_{\max}, F_{\max}]$. On note $s_m^+(f)$ et $s_m^-(f)$ les parties de $s_m(f)$ associées aux fréquences positives et négatives, i.e. $s_m(f) = s_m^+(f) + s_m^-(f)$ avec

$$s_m^+(f) = \begin{cases} s_m(f) \text{ si } f > 0 \\ 0 \text{ si } f < 0 \end{cases} \text{ et } s_m^-(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } f > 0 \\ s_m(f) \text{ si } f < 0 \end{cases}$$

On note également $R_m(\tau)$ et P_m la fonction d'autocorrélation et la puissance de $m(t)$. On suppose que θ est une phase aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$ indépendante du message $m(t)$.

1) Déterminer la moyenne de $x(t)$. En utilisant les résultats de la première partie, exprimer la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ en fonction de $R_m(\tau)$ et de $R_{m\widehat{m}}(\tau)$. Le signal aléatoire $x(t)$ est-il stationnaire ?

2) Déterminer la densité spectrale de puissance de $x(t)$ en fonction de f_0 et de $s_m^+(f)$ et $s_m^-(f)$.

3) Application : on suppose que $m(t) = A\cos(2\pi f_1 t + \phi)$, où f_1 est une fréquence fixe ($f_1 > 0$), A est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec les probabilités $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ et ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$. On suppose que A, ϕ et $m(t)$ sont des variables aléatoires indépendantes.Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $m(t)$. En déduire la densité spectrale de puissance de $x(t)$.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{Re}\left\{X(f)\right\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\left\{X(f)\right\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\left\{X(f)\right\} \text{ impaire} \end{array}\right.$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

Formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$$

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$$

avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

Fonction de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$$

Rappels de base

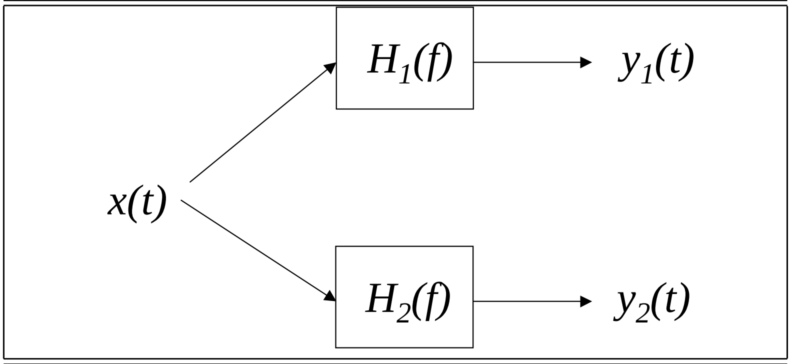
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$$

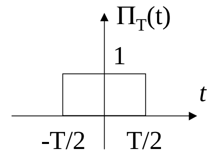
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}du = \pi$$

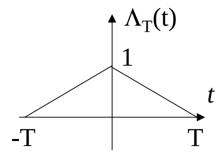
Formule des Interférences

$$R_{y_1y_2}(\tau) = E\left[y_1(t)y_2(t-\tau)\right] = \int H_1(f)H_2^*(f)e^{j2\pi f\tau}s_x(f)df$$



Fenêtres





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$