Partiel de Traitement du Signal.

Jeudi 13 décembre 2007

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Variance d'Allan

Soit $x(t)$ un processus aléatoire stationnaire de moyenne $E[x(t)] = 0$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$.

1) On considère l'opération définie par

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(u)du$$

- Montrer que $y(t) = F_T[x(t)]$, où F_T est un filtre linéaire invariant dans le temps. Déterminer la réponse impulsionnelle $h_T(t)$ et la transmittance $H_T(f)$ de ce filtre F_T.

- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$ notée $s_y(f)$ en fonction de $s_x(f)$. En déduire une expression intégrale permettant d'obtenir la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$.

- Montrer que la puissance du signal $y(t)$ s'écrit

$$P_y = \int s_x(f)\sin c^2(\pi f T)\, df \qquad \text{avec} \qquad \sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

2) On considère le signal constant par morceaux défini par

$$D(t) = \frac{y[(k+1)T] - y[kT]}{\sqrt{2}} \text{ si } t \in [kT, (k+1)T[$$

- Déterminer la puissance du signal $D(t)$ notée $P_D(T)$ en fonction de $R_y(0)$ et $R_y(T)$ puis sous une forme intégrale dépendant de $s_x(f)$.

- En utilisant la parité de la densité spectrale de puissance $s_x(f)$, en déduire

$$P_D(T) = 4\int_0^{\infty} \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} s_x(f)df$$

La puissance $P_D(T)$ est appelée **variance d'Allan** du signal $x(t)$.

3) On rappelle les relations suivantes

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^2}du = \frac{\pi}{4}, \int_0^{\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3}du = \log 2 \text{ et } \int_0^{\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^4}du = \frac{\pi}{3}$$

Représenter graphiquement $\log P_D(T)$ en fonction de $\log T$ dans les cas suivants
- Bruit blanc : $s_x(f) = K_0$
- Bruit de Flicker : $s_x(f) = \frac{K_1}{f}$
- Marche aléatoire de fréquence : $s_x(f) = \frac{K_2}{f^2}$

Á votre avis, quel est l'intérêt de la variance d'Allan ?

Exercice 2 : Echantillonnage

1) Soit $x(t)$ un signal déterministe de puissance finie de transformée de Fourier $X(f)$ à support borné $\left[-\frac{B}{2},+\frac{B}{2}\right]$. On multiplie ce signal par une fonction périodique de période T_e (et de fréquence $F_e = 1/T_e$) qui se décompose en série de Fourier sous la forme

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t F_e}$$

pour obtenir le signal

$$y(t) = x(t)g(t).$$

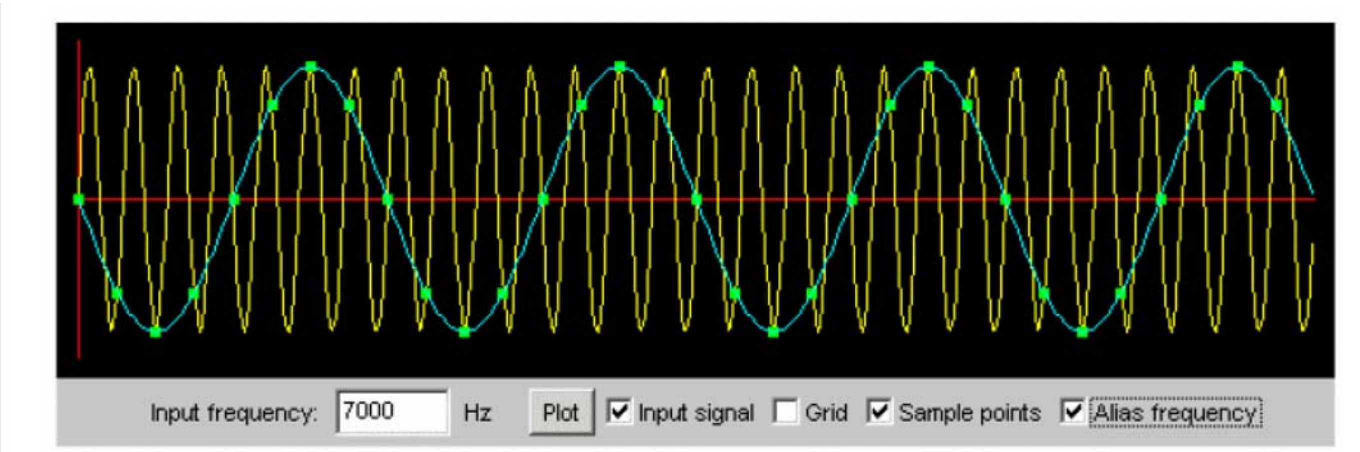
- Montrer que la transformée de Fourier de $y(t)$ notée $Y(f)$ est obtenue par "périodisation" de $X(f)$ à des constantes multiplicatives près. Représenter $Y(f)$ dans le cas où $x(t)$ est un signal passe bas idéal tel que $X(f) = \Pi_B(f)$.
- On filtre le signal $y(t)$ à l'aide d'un filtre de transmittance $H(f)$ et on obtient le signal $x_r(t)$. Quelle est la condition portant sur F_e et B permettant de restituer $x(t)$ à l'issue de ce filtrage ?

2) On suppose désormais que $x(t)$ est un processus aléatoire stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right]$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ et on considère le signal

$$z(t) = x(t)g(t+\phi)$$

où ϕ est une phase uniformément répartie sur l'intervalle $[0, T_e[$ indépendante du signal $x(t)$.

- Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $z(t)$ notées respectivement $R_z(\tau)$ et $s_z(f)$ en fonction de $R_x(\tau)$, des coefficients c_k et de F_e.
- Représenter $s_z(f)$ lorsque $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, où A et f_0 sont deux constantes et θ est une phase uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$
- Le signal $x(t)$ est représenté en jaune sur la figure ci-dessous tandis que les points en vert correspondent à la suite périodique d'instants contenus dans $g(t+\phi)$. On filtre le signal $z(t)$ à l'aide d'un filtre passe bas idéal et on obtient le signal en bleu représenté sur la figure ci-dessous. Pouvez vous expliquer ce résultat ?



Transformée de Fourier

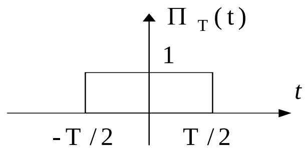
$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

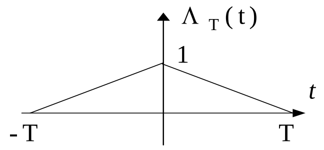
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{\begin{array}{c}\operatorname{Re}\{X(f)\}\text{ paire}\\ \operatorname{Im}\{X(f)\}\text{ impaire}\\ \lvert X(f)\rvert\text{ pair}\\ \arg\{X(f)\}\text{ impaire}\end{array}\right.$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$\int_0^t x(u)du$	$\rightleftharpoons$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \left\{\begin{array}{c}0\text{ si } t\neq 0\\ +\infty \text{ si } t=0\end{array}\right. \quad\text{et}\quad \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1\\ \delta(t-t_0)\,f(t) &= \delta(t-t_0)\,f(t_0)\\ \delta(t-t_0)*f(t) &= f(t-t_0)\end{aligned}$$