Partiel de Traitement du Signal.

Lundi 8 décembre 2008

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Échantillonnage

1) On considère le signal déterministe

$$x(t) = f_m \left[\frac{\sin(\pi f_m t)}{\pi f_m t}\right]^2$$

que l'on échantillonne avec la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$.

1.1) Déterminer le spectre du signal échantillonné idéal

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\,\delta(t - kT_e)$$

et représenter le graphiquement. Expliquer comment on peut à l'aide de ce graphique retrouver la condition de Shannon.

1.2)Qu'appelle-t-on formule d'interpolation de Shannon ?

1.3) Expliquer le rôle du filtre anti-repliement.

2) Afin de reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$, on considère un filtre de restitution de réponse impulsionnelle

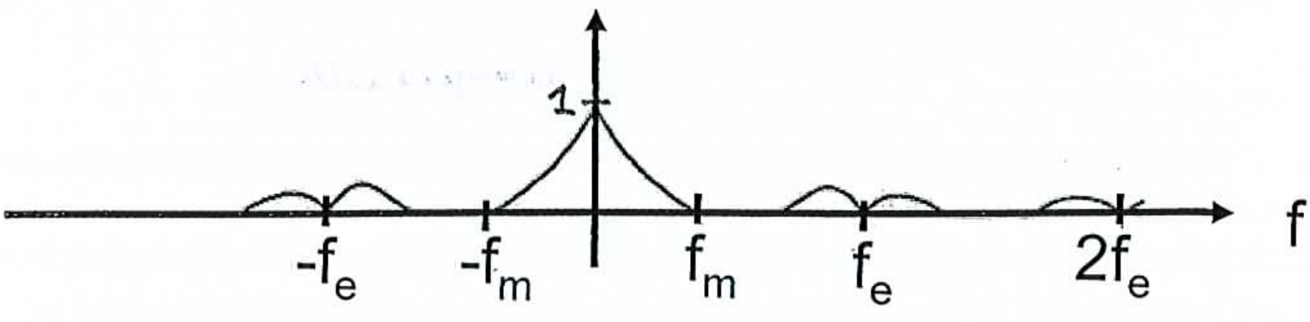
$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \,]0, T_e[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2.1) Donner l'expression du signal restitué $x_r(t) = x_e(t) * h(t)$ et montrer qu'il peut s'écrire

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) x(kT_e)$$

où $a_k(t)$ est une fonction que l'on précisera. Représenter graphiquement le signal $x(t)$ et sa restitution $x_r(t)$

2.2) Déterminer la transformée de Fourier du signal $x_r(t)$ notée $X_r(f)$. Le module de cette tranformée de Fourier est représenté ci-desssous. Expliquer cette représentation.



2.3) Afin de compenser la distorsion induite par le filtre de restitution $h(t)$, on utilise un filtre appelé filtre anti-imageur de fonction de transfert

$$H_c(f) = \frac{\pi f T_e}{\sin(\pi T_e f)}$$

Expliquer l'expression de cette fonction de transfert.

Exercice 2 : Analyse Cepstrale

1) Le cepstre d'un signal réel à énergie finie $x(t)$ de transformée de Fourier $X(f)$ est défini par

$$c_x(\tau) = TF^{-1}\left\{\ln\left[|X(f|^2\right]\right\}$$

1.1) Montrer que si $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$, i.e. si $y(t) = x(t) * h(t)$, on a

$$c_y(\tau) = c_x(\tau) + c_h(\tau).$$

1.2) On considère la somme d'un signal à énergie finie $x(t)$ et d'un écho défini par

$$y(t) = x(t) + ax(t-T),$$

avec $a > 0$ et $T > 0$. Montrer que $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $x(t)$. Quelles sont la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la fonction de transfert $H(f)$ de ce filtre ?

1.3) On désire déterminer le cepstre de $h(t)$. On rappelle que le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$ valable pour $|x| \leq 1$ est

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

En posant $\gamma = \frac{2a}{a^2+1} < 1$ et en supposant que γ est suffisamment petit pour qu'on puisse négliger les termes d'ordres γ^k avec $k > 2$, donner un développement limité de $\ln\left[|H(f|^2\right]$ et déterminer une approximation du cepstre de $h(t)$ résultant de ce développement limité..

1.4) Expliquer comment identifier le retard T à partir du cepstre du signal $y(t)$ moyennant certaines conditions que l'on précisera.

2) Le cepstre d'un signal aléatoire réel stationnaire $x(t)$ de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ est défini par

$$c_x(\tau) = TF^{-1}\left\{\ln\left[s_x(f)\right]\right\}.$$

2.1) On considère la somme d'un signal aléatoire stationnaire $x(t)$ et d'un écho défini par

$$y(t) = x(t) + ax(t-T),$$

avec $a > 0$ et $T > 0$. Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$.

2.2) Déterminer le cepstre du signal $y(t)$ défini ci-dessus. La procédure d'identification du retard T proposée au paragraphe 1) est-elle applicable dans le contexte des signaux aléatoires stationnaires ?

3) On suppose dans cette partie qu'on reçoit deux signaux aléatoires stationnaires notés $y_1(t)$ et $y_2(t)$ définis comme suit

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) + a_1 x(t-T_1), \\ y_2(t) &= [x(t) + a_2 x(t-T_2)] * g(t), \end{aligned}$$

où $g(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire que l'on cherche à identifier. Déterminer les cepstres de ces deux signaux notés $c_{y_1}(\tau)$ et $c_{y_2}(\tau)$ et expliquer sous quelles conditions on peut à l'aide de $c_{y_2}(\tau) - c_{y_1}(\tau)$ identifier le filtre de réponse impulsionnelle $g(t)$.

de moyenne nulle

4) On désire maintenant étudier l'influence d'un bruit additif $n(t)$ sur l'estimation du retard T. On considère donc le signal

$$z(t) = x(t) + ax(t-T) + n(t),$$

où $x(t)$ et $n(t)$ sont des signaux aléatoires stationnaires indépendants. Déterminer la densité spectrale de puissance de $z(t)$ notée $s_z(f)$ en fonction de celles de $x(t)$ et $n(t)$ notées $s_x(f)$ et $s_n(f)$. Montrer alors que

$$\ln\left[s_z(f)\right] = \ln\left[(1+a^2)s_x(f)\right] + A(f) + \ln\left[1 + \gamma B(f)\cos(2\pi f T)\right],$$

où $\gamma = \frac{2a}{a^2+1}$, $A(f)$ est est un bruit défini par

$$A(f) = \ln\left[1 + \frac{s_n(f)}{(1+a^2)\, s_x(f)}\right],$$

et $B(f)$ est un autre bruit dont on précisera l'expression.