Partiel de Traitement du Signal.

Lundi 18 janvier 2010

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Echantillonnage

On considère un signal déterministe

$$x(t) = f_0 \left[\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}\right]^2 = f_0 \sin c^2 (\pi f_0 t)$$

avec $f_0 > 0$.
1) On échantillonne le signal $x(t)$ avec la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$. Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

notée $X_e(f)$. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $F_e = 3f_0$ et lorsque $F_e = f_0$.
2) On désire restituer le signal $x(t)$ en filtrant le signal échantillonné $x_e(t)$ par un filtre passe bas idéal de transmittance

$$H(f) = \Pi_{F_e}(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } |f| < \frac{F_e}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Déterminer l'expression du signal restitué $x_r(t)$ lorsque $F_e = 3f_0$ et lorsque $F_e = f_0$. Commenter ce résultat.

Exercice 2 : Amplificateur Klystron

Un amplificateur Klystron peut être caractérisé par la relation entrée-sortie suivante

$$Y(t) = X(t) - kX^3(t)$$

1) On suppose dans un premier temps que le signal d'entrée $X(t)$ est déterministe et défini par

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

où A et f_0 sont deux constantes. En utilisant la relation classique $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$, montrer qu'il existe une valeur de k que l'on exprimera en fonction de A telle que le spectre du signal de sortie $Y(t)$ ne contienne pas de raie à la fréquence f_0. Pour cette valeur de k, quelle est la puissance et la densité spectrale de puissance du signal de sortie de l'amplificateur Klystron ?
2) On suppose désormais que l'entrée de l'amplificateur Klystron est un signal stationnaire Gaussien de moyenne nulle et de variance $E\left[X^2(t)\right] = \sigma^2$. Déterminer la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$ notée $R_X(\tau)$, de k, σ^2 et d'une constante additive C. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation suivante

$$m_{2n} = E\left[X^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1)(2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right]\sigma^{2n}$$

En déduire la valeur de C.
Rappel : on pourra utiliser l'expression de fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours et TD)

$$E\left[X^2(t)X^2(t-\tau)\right] = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

Exercice 3 : Filtre Adapté

On considère un signal déterministe à énergie finie $s(t)$ défini sur l'intervalle $[0, T]$ perturbé par un bruit $b(t)$ additif stationnaire de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R_b(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_b(f)$

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

On filtre le signal $x(t)$ à l'aide d'un fitre linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance $H(f)$ et on note $y(t) = x(t) * h(t)$ la sortie de ce filtre.
1) On note $y_s(t_0)$ la sortie du filtre à l'instant t_0 lorsque l'entrée est $s(t)$. Montrer que

$$y_s(t_0) = \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi f t_0} df$$

où $S(f)$ est la transformée de Fourier du signal $s(t)$. Déterminer $y_s(t_0)$ lorsque

$$s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} A \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Tracer $y_s(t_0)$ en fonction de t_0.
2) Soit $y_b(t_0)$ la sortie du filtre à l'instant t_0 lorsque l'entrée est $b(t)$. Montrer que la puissance du signal $y_b(t_0)$ s'écrit

$$E\left[y_b^2(t_0)\right] = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df$$

Déterminer cette puissance pour $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ et pour le filtre de la question précédente.
3) On admet que le filtre qui maximise le rapport signal sur bruit à l'instant t_0 ($\text{SNR}(t_0) = y_s^2(t_0)/E\left[y_b^2(t_0)\right]$) est défini par

$$H_0(f) = k\frac{S^*(f)}{s_b(f)}e^{-j2\pi f t_0}$$

où k est une constante. Dans le cas d'un bruit blanc défini par $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$, déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre notée $h_0(t)$ en fonction de k, N_0, t_0 et du signal $s(t)$. Tracer $h_0(t)$ dans le cas du signal $s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$.
4) On choisit $t_0 = T$ et on suppose que $s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$, $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$ et que $b(t)$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) de densité spectrale de puissance $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$.

- Déterminer $y_s(T)$
- Montrer que $y_b(T)$ s'écrit

$$y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T b(u)du$$

En déduire la moyenne de $y_b(T)$ notée $E\left[y_b(T)\right]$. On admettra que la variance de $y_b(t)$ est $\frac{N_0}{2}$. On suppose maintenant que $y_b(T)$ est un signal Gaussien. Déterminer la densité de probabilité du signal $y(T) = y_s(T) + y_b(T)$ notée $p\left[y(T)|\, A\right]$. On rappelle que la densité de probabilité d'une variable aléatoire X Gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

5) **Question Bonus** : On suppose que l'amplitude du signal déterministe A peut prendre deux valeurs, à savoir

$$\begin{aligned} \text{Hypothèse } H_0 &\quad : \quad A = -1 \\ \text{Hypothèse } H_1 &\quad : \quad A = +1 \end{aligned}$$

et on désire déterminer quelle hypothèse est vérifiée à partir du signal reçu $y(T)$ (qui est la sortie du filtre adapté à l'instant $t_0 = T$). On adopte la stratégie suivante

$$H_0 \text{ est acceptée si } p\left[y(T)|\, A = -1\right] P\left[A = -1\right] > p\left[y(T)|\, A = +1\right] P\left[A = +1\right]$$

En notant $p = P\left[A = +1\right]$ et $q = 1 - p = P\left[A = -1\right]$, montrer que cette stratégie consiste à comparer $y(T)$ à un seuil qu'on explicitera en fonction de p, N_0 et T. Que devient cette règle si $p = q = \frac{1}{2}$?

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

T.F.

$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval

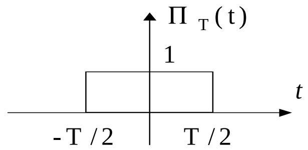
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

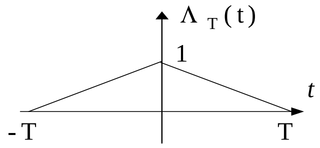
Série de Fourier

$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1 \\ \delta(t-t_0)\, f(t) &= \delta(t-t_0)\, f(t_0) \\ \delta(t-t_0) * f(t) &= f(t-t_0) \end{aligned}$$