Partiel de Traitement du Signal.

Lundi 24 janvier 2011

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Estimation d'un temps de retard

1) On considère un signal déterministe à énergie finie noté $x(t)$ représentant un signal sonore émis par une source. Ce signal est enregistré par deux microphones situés dans une pièce acoustique. On ignore dans cet exercice le bruit affectant la transmission. Les signaux reçus par ces deux microphones peuvent être alors définis de la façon suivante

$$x_1(t) = A_1 x(t - T_1) \text{ et } x_2(t) = A_2 x(t - T_2)$$

où les amplitudes et retards A_1, A_2, T_1, T_2 sont des réels positifs.

- Déterminer la fonction d'intercorrélation entre les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ notée $R_{x_1 x_2}(\tau)$ en fonction des amplitudes A_1 et A_2, de la différence des temps d'arrivée $T = T_1 - T_2$ et de la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ du signal source $x(t)$. Proposer une méthode permettant d'estimer la différence des temps d'arrivée $T = T_1 - T_2$ à partir de $R_{x_1 x_2}(\tau)$.

- En utilisant l'inégalité de Parseval, montrer que

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = TF^{-1}\left[X_1(f) X_2^*(f)\right]$$

En déduire $R_{x_1 x_2}(\tau)$ lorsque le signal source s'écrit

$$x(t) = \Pi_a(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| < \frac{a}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Calculer l'expression suivante

$$G(\tau) = TF^{-1}\left[\frac{X_1(f) X_2^*(f)}{|X_1(f)|\,|X_2(f)|}\right]$$

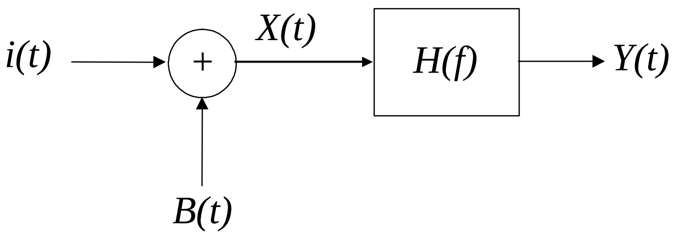
et en déduire que T peut aussi être estimé à l'aide de la fonction $G(\tau)$.

2) On suppose désormais que le signal source est un signal périodique (de période T_0) de puissance finie. Déterminer $R_{x_1 x_2}(\tau)$ en fonction de A_1, A_2, T et de l'autocorrélation du signal source R_x. Peut-on estimer T à partir de $R_{x_1 x_2}(\tau)$? Etudier le cas particulier où $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

3) Pour terminer on suppose que le signal source est un signal aléatoire stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$. Déterminer $R_{x_1 x_2}(\tau)$ en fonction de A_1, A_2, T et de l'autocorrélation du signal source $R_x(\tau)$. Que pensez vous de l'utlisation de la fonction $G(\tau)$ pour estimer la différence des temps d'arrivée T ?

Exercice 2 : Filtre de Wiener

On considère le système suivant



où $i(t)$ est l'information utile qui est perturbée par un bruit additif $B(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_b(\tau) = E\left[B(t)B^*(t-\tau)\right]$. On suppose que l'information $i(t)$ est un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_i(\tau) = E\left[i(t)i^*(t-\tau)\right]$ et on observe uniquement le signal $X(t)$. Le but de ce problème est de construire un filtre de transmittance $H(f)$ (appelé filtre de Wiener) permettant d'estimer l'information $i(t)$ à partir du signal $X(t)$, c'est-à-dire tel que $Y(t)$ soit le plus proche possible de $i(t)$ (on aura alors effectué un débruitage du signal $X(t)$). On peut montrer que le filtre solution de ce problème vérifie les équations normales définies par

$$E\left\{\left[i(t) - Y(t)\right] X^*(u)\right\} = 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

1) En supposant que les signaux $i(t)$ et $B(t)$ sont indépendants, déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$ en fonction de celles de $i(t)$ et $B(t)$. Montrer que les équations normales permettent d'obtenir

$$R_i(t-u) = \int h(v) R_x\left(t-u-v\right) dv, \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

Puisque ce résultat est valable $\forall u \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$R_i(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau)$$

En déduire que la transmittance recherchée vérifie

$$H(f) = \frac{s_i(f)}{s_i(f) + s_B(f)} \tag{1}$$

où $s_i(f)$ et $s_B(f)$ sont les densités spectrales de puissance des signaux $i(t)$ et $B(t)$. *Remarque* : si vous n'arrivez pas à résoudre cette question, vous pouvez admettre le résultat (1) et continuer le problème.

2) On suppose que $B(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $s_B(f) = \sigma_b^2$ et que $i(t)$ est obtenu par filtrage d'un bruit blanc $e(t)$ de densité spectrale de puissance $s_e(f) = 1$ par un filtre de réponse impulsionnelle

$$\pi_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Déterminer la transmittance de ce filtre, puis $s_i(f)$ et enfin $H(f)$. En déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre de Wiener en fonction de a et σ_b^2.

3) Déterminer les limites de $H(f)$ et de $h(t)$ lorsque $\sigma_b^2 \to 0$. Interprèter ce résultat.

Exercice 3 : Filtrage non-linéaire

On considère une non-linéarité modélisant une distorsion de type à "écrétage progressif"

$$G(x) = \text{erf}(x) - \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{2}$$

On l'applique à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle

$$Y(t) = G\left[X(t)\right].$$

On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T\right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où Σ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1) Exprimer les éléments de Σ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que l'autocorrélation du signal $Y(t)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.
2) En utilisant le théorème de Price, montrer que $R_X(\tau)$ et $R_Y(\tau)$ sont liées par une équation de la forme

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = F\left[R_X(\tau)\right]$$

où F est une fonction que l'on précisera. On admettra que pour un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$, on a

$$E\left\{\exp\left[-\frac{X^2(t) + X^2(t-\tau)}{2}\right]\right\} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R_X(0)\right)^2 - R_X^2(\tau)}}.$$

3) En déduire $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près. On rappelle la primitive suivante

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin\left(\frac{u}{|a|}\right)$$

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

T.F.

$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array}\right.$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval

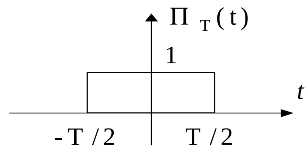
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

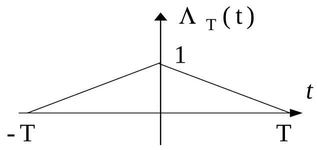
Série de Fourier

$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f-nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$\delta(t) = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{array}\right.$ et $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$
$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$
$\delta(t-t_0)*f(t) = f(t-t_0)$