Partiel de Traitement du Signal.

Mercredi 18 janvier 2012

INP ENSEEIHT

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Rapport Signal sur Bruit (fait en TD)

On considère un filtre (linéaire invariant dans le temps) de réponse impulsionnelle $h(t)$

$$h(t) = \begin{cases} \exp(-at) \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

avec $a > 0$. On applique à l'entrée de ce filtre un signal aléatoire $x(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, où A et f_0 sont deux constantes, et d'un bruit blanc stationnaire $b(t)$ de densité spectrale de puissance $s_b(f) = \sigma_b^2$, c'est-à-dire

$$x(t) = s(t) + b(t).$$

1) Montrer que la transmittance de ce filtre s'écrit

$$H(f) = TF[h(t)] = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

2) Déterminer la puissance P_{y_b} du signal $y_b(t)$ défini par

$$y_b(t) = b(t) * h(t).$$

3) Déterminer l'expression du signal filtré

$$y_s(t) = s(t) * h(t)$$

et en déduire sa puissance notée P_{y_s}.

4) En déduire le rapport signal sur bruit du signal filtré défini par

$$\text{RSB} = \frac{P_{y_s}}{P_{y_b}}$$

et montrer qu'il est maximal pour $a = 2\pi f_0$.

5) Il est habituel d'exprimer le rapport signal sur bruit en décibels. Rappelez la définition de ce rapport signal sur bruit noté RSB_{dB}. Que signifient $\text{RSB}_{dB} = 0\text{dB}$, $\text{RSB}_{dB} = 20\text{dB}$ et $\text{RSB}_{dB} = -20\text{dB}$?

Exercice 2 : Amplificateur Klystron (extrait de l'examen 2009-2010)

Un amplificateur Klystron peut être caractérisé par la relation (non-linéaire) entrée-sortie suivante

$$Y(t) = X(t) - kX^3(t)$$

1) On suppose dans un premier temps que le signal d'entrée $X(t)$ est déterministe et défini par

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

où A et f_0 sont deux constantes. En utilisant la relation classique $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$, montrer qu'il existe une valeur de k que l'on exprimera en fonction de A telle que le spectre du signal de sortie $Y(t)$ ne contienne pas de raie à la fréquence f_0. Pour cette valeur de k, quelle est la puissance et la densité spectrale de puissance du signal de sortie de l'amplificateur Klystron ?

2) On suppose désormais que l'entrée de l'amplificateur Klystron est un signal stationnaire Gaussien de moyenne nulle et de variance $E\left[X^2(t)\right] = \sigma^2$. Déterminer la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$ notée $R_X(\tau)$, de k, σ^2 et d'une constante additive C. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation suivante

$$m_{2n} = E\left[X^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1)(2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] \sigma^{2n}$$

En déduire la valeur de C.
Rappel : on pourra utiliser l'expression de fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours et TD)

$$E\left[X^2(t)X^2(t-\tau)\right] = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

Exercice 3 : Echantillonnage d'un signal complexe

1) On considère un signal déterministe à énergie finie à valeurs réelles noté $s(t)$. Montrer que les parties réelles et imaginaires de la transformée de Fourier de $s(t)$ notées $S_r(f)$ et $S_i(f)$ sont des fonctions respectivement paires et impaires.
2) On suppose que la transformée de Fourier du signal $s(t)$ est définie par

$$S(f) = S_r(f) + iS_i(f) = \begin{cases} A \text{ si } -F < f < 0 \\ A\left(1 - \frac{f}{2F}\right) \text{ si } 0 \leq f < 2F \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Représenter graphiquement $S(f)$ et en déduire si $s(t)$ est un signal réel ou complexe (on pourra utiliser 1).
3) On échantillonne le signal $s(t)$ à la fréquence $f_e = 7F/2$. Représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_e)\,\delta(t - kT_e).$$

On désire restituer le signal $s(t)$ par filtrage du signal $s_e(t)$ avec un filtre de transmittance

$$H(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } F_1 < f < F_2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donner des conditions que doivent vérifier les fréquences F_1 et F_2 pour que la restitution se fasse sans erreur. La fréquence d'échantillonnage respecte-t-elle la condition de Shannon ? Pouvez vous expliquer pourquoi on peut avoir une reconstruction sans erreur de $s(t)$ à partir de $s_e(t)$?
4) On considère un signal complexe $s(t)$ et sa partie réelle notée $r(t)$ telle que

$$r(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) + s^*(t)\right]$$

Déterminer la transformée de Fourier de $r(t)$ notée $R(f)$ et représentez la graphiquement lorsque $s(t)$ est le signal de la question 2). Quelle est la condition de Shannon pour le signal réel $r(t)$? Expliquer ce résultat.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

T.F.

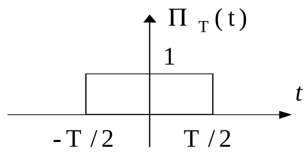
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

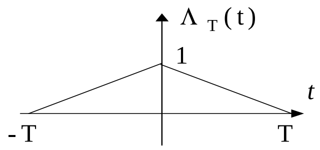
Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t} dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$