Partiel de Traitement du Signal.

Mercredi 8 janvier 2014

Partiel sans document et sans calculatrice (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 (3 points)

On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \begin{cases} A \text{ si } t \in [0, T] \\ -A \text{ si } t \in [-T, 0[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où A et T sont des constantes positives. Le signal $x(t)$ est-il à énergie finie ou à puissance finie ? Déterminer l'énergie, la puissance moyenne, la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$.

Exercice 2 (3 points)

On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\cos(\pi f_0 t)$$

où A, B et f_0 sont des constantes positives. Déterminer la puissance, la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

Exercice 3 (3 points)

On considère un signal aléatoire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale $s_X(f)$ et le signal

$$Y(t) = AX(t) + BX(t-\theta)$$

où A, B et θ sont des constantes positives. Montrer que le signal $Y(t)$ est stationnaire et déterminer sa fonction d'autocorrélation et sa densité spectrale de puissance.

Exercice 4 (3 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne $E[X(t)] = m$, de densité spectrale de puissance $s_X(f)$ et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$. On construit le signal

$$Y(t) = X(t) - AX(t-1).$$

Montrer que $Y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire invariant dans le temps (LIT) d'entrée $X(t)$ et préciser la transmittance et la réponse impulsionnelle de ce filtre. En déduire que $X(t)$ est la sortie d'un filtre LIT d'entrée $Y(t)$ et préciser la transmittance de ce filtre. Quelle est la relation reliant les densités spectrales de $X(t)$ et $Y(t)$?

Exercice 5 (3 points)

On échantillonne le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 5kHz$ à la fréquence d'échantillonnage $F_e = 8kHz$. Déterminer la densité spectrale du signal échantillonné $x_e(t)$ et représenter la graphiquement pour $|f| < 12kHz$. Quel signal obtient-on si on filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_c = 4kHz$? Même question si on filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bande idéal de bande passante $[-6kHz, -4kHz] \cup [4kHz, 6kHz]$.

Exercice 6 (3 points)

On considère un signal aléatoire gaussien stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle, de puissance $E\left[X^2(t)\right] = \sigma^2$ et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E\left[X(t)X(t-\tau)\right]$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t) = aX(t) + bX^2(t)$ (où a et b sont deux constantes) en fonction de $R_X(\tau)$ et d'une constante additive notée C. Déterminer ensuite la constante C.

Rappel : on rappelle que pour un signal $X(t)$ gaussien de moyenne nulle, on a

$$E\left[X^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 3 \times 1\right] \sigma^{2n}$$

Exercice 7 (2 points)

On considère un processus de Poisson de paramètre λ. Que représente le paramètre λ (justifier votre réponse) ? Déterminer la probabilité que le nombre d'instants appartenant à l'intervalle $[-\tau, \tau]$ soit égal à 1.

Rappel : on rappelle que si Z suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$, on a

$$P\left[Z = k\right] = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Transformée de Fourier

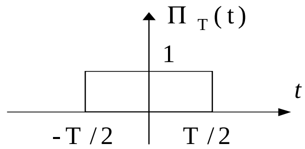
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

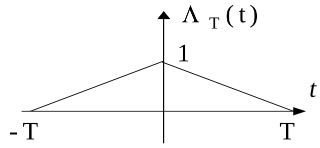
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f) \rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t) \rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f) \rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$