Partiel de Traitement du Signal

(Une feuille A4 recto-verso autorisée) 5 avril 2006, 8h-10h00

Exercice 1 : Échantillonnage d'un signal passe bande

1) On considère le signal $x(t) = x^{+}(t) + x^{-}(t)$ défini comme suit

$$x^{+}(t) = B\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{j2\pi f_0 t} \text{ et } x^{-}(t) = B\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{-j2\pi f_0 t}$$

avec $f_0 = 8kHz$ et $B = 1kHz$. Déterminer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ et représenter la graphiquement.
2) Rappeler l'expression du signal $x_e(t)$ obtenu par échantillonnage idéal de $x(t)$ à la fréquence F_e. Déterminer la transformée de Fourier de $x_e(t)$ notée $X_e(f)$. Comment s'écrit la condition de Shannon pour le signal $x(t)$?
3) On échantillonne le signal $x(t)$ à la fréquence $F_e = 6kHz$. Représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$ dans la bande $[-9kHz, 9kHz]$. On désire restituer le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ par un filtrage de transmittance $H(f)$.
• **1er cas** : $H(f) = \Pi_F(f)$ avec $F = 6kHz$. Montrer que le signal restitué par ce filtre noté $x_r(t)$ a une expression temporelle similaire à celle de $s(t)$ mais obtenue en remplaçant f_0 par une autre fréquence que l'on précisera.
• **2ème cas** :$H(f) = \Pi_B(f + f_0) + \Pi_B(f - f_0)$ (avec $f_0 = 8kHz$ et $B = 1kHz$ comme précédemment). Quel est le signal restitué $x_r(t)$?
En vous appuyant sur les résultats obtenus ci-dessus, expliquer s'il est possible de restituer un signal passe-bande échantillonné sans respecter la condition de Shannon.

Exercice 2

En radar, pour estimer l'instant d'arrivée d'un écho dû à une cible, on calcule à la réception la fonction $g(t)$ définie par

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} r(u)x(u-t)du,$$

où $r(t)$ désigne le signal reçu et où $x(t)$ est le signal émis (qui est supposé connu). Dans cet exercice, on supposera que $x(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$ (i.e. $x(t) = A$ si $t \in [0,T]$ et $x(t) = 0$ si $t \notin [0,T]$).
1) Á quelle classe appartient le signal $x(t)$? Déterminer la transformée de Fourier, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale d'énergie du signal $x(t)$ défini ci-dessus.
2) En l'absence de bruit, on a $r(t) = x(t - t_0)$. Représenter alors graphiquement la fonction $g(t)$ obtenue.
3) En présence de bruit, on a $r(t) = x(t - t_0) + b(t)$, où $b(t)$ est un signal aléatoire modélisant le bruit additif perturbant l'écho de la cible.

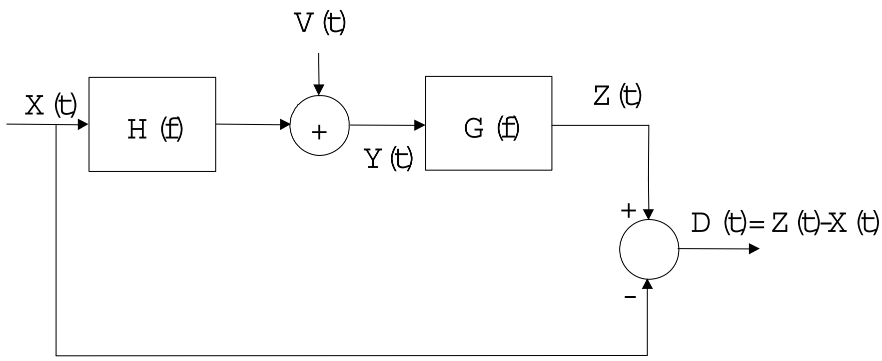
• On suppose dans cet exercice que $b(t)$ est un bruit blanc gaussien (de moyenne nulle). Expliquer ce que cela signifie.

• L'opération qui associe au signal aléatoire $r(t)$ le signal $g(t)$ est-elle une opération de filtrage linéaire invariant dans le temps ? Si oui, déterminer la réponse impulsionnelle et la transmittance de ce filtre.

• Déterminer la moyenne de la fonction $g(t)$ lorsque $r(t) = x(t - t_0) + b(t)$. Expliquer qualitativement l'effet du bruit $b(t)$ sur la fonction $g(t)$. Représenter graphiquement un exemple de fonction $g(t)$ obtenue en présence de bruit.

Exercice 3

On considère le système représenté sur la figure ci-dessous



Tous les signaux représentés sur cette figure sont des signaux aléatoires supposés stationnaires. On suppose de plus que le bruit $V(t)$ est de moyenne nulle et qu'il est indépendant de l'entrée du système $X(t)$. On utilisera les notations habituelles pour représenter les fonctions d'autocorrélation et densités spectrales de puissance (i.e. $R_X(\tau)$ et $s_X(f)$ pour le signal $X(t)$).
1) Montrer que si $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont des signaux indépendants avec $E[X_1(t)] = 0$, alors la densité spectrale de puissance (DSP) de $X_1(t) + X_2(t)$ est la somme des DSP de $X_1(t)$ et $X_2(t)$. En déduire la DSP de $Y(t)$ en fonction des DSP de $V(t)$ et de $X(t)$ et de la transmittance du premier filtre $H(f)$.
2) Exprimer le signal temporel $Z(t)$ en fonction de $X(t), V(t)$ et des réponses impulsionnelles $h(t)$ et $g(t)$. Montrer que $Z(t)$ est la somme de deux signaux notés $Z_V(t)$ et $Z_X(t)$ dépendant de $V(t)$ et de $X(t)$ respectivement. En utilisant le fait que $Z_V(t)$ et $Z_X(t)$ sont indépendants, déterminer la DSP de $Z(t)$.
3) Dans le cas où le rapport signal à bruit du système est important, c'est-à-dire qu'on peut supposer $s_V(f) \simeq 0$, comment doit-on choisir le filtre de transmittance $G(f)$ pour avoir $s_Z(f) \simeq s_X(f)$?
4) En utilisant la formule des interfèrences, montrer que

$$\begin{aligned} s_{XZ}(f) &= TF\left[E\left[X(t)Z^*(t-\tau)\right]\right] = H^*(f)G^*(f)s_X(f) \\ s_{ZX}(f) &= TF\left[E\left[Z(t)X^*(t-\tau)\right]\right] = H(f)G(f)s_X(f) \end{aligned}$$

En déduire que la densité spectrale de puissance de $D(t) = Z(t) - X(t)$ s'écrit sous la forme

$$s_D(f) = |G(f)|^2 s_V(f) + |H(f)|^2 \left|G(f) - H^{-1}(f)\right|^2 s_X(f),$$

Lorsque le bruit est suffisament "faible", comment doit-on choisir le filtre $G(f)$ pour avoir $s_D(f) \simeq 0$?

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

Formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$$

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$$

$$\text{avec } c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$$

Fonction de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$$

Rappels de base

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

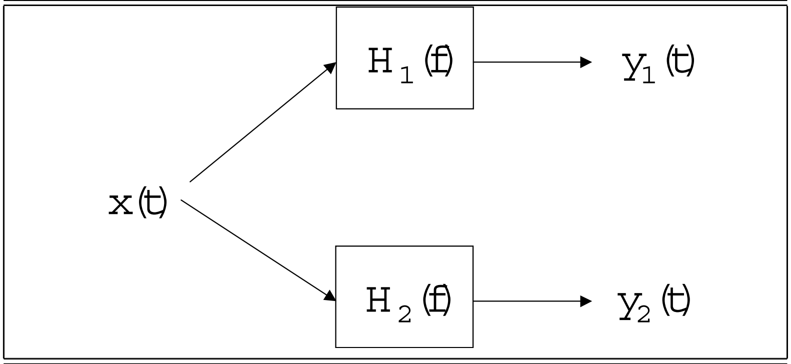
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \pi$$

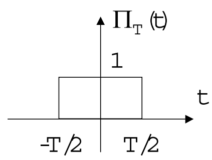
Formule des Interférences

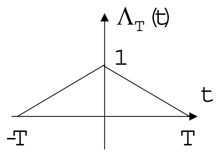
$$R_{y_1y_2}(\tau) = E[y_1(t)y_2(t-\tau)] = \int H_1(f)H_2^*(f)e^{j2\pi f\tau}s_x(f)df$$

$$s_{y_1y_2}(f) = TF[R_{y_1y_2}(\tau)] = H_1(f)H_2^*(f)s_x(f)$$



Fenêtres





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$