Partiel de Traitement du Signal (1 TR, 2 EN).

Mardi 12 décembre 2006, 8h00-10h00

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Filtrage d'une sinusoide

1) On considère le signal sinusoidal défini par

$$x_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

où A est une amplitude fixe et f_0 est une fréquence fixe. On filtre ce signal $x(t)$ à l'aide d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de fonction de transfert $H(f)$ et on cherche certaines propriétés du signal de sortie $y_1(t) = \mathcal{F}[x_1(t)]$, où $\mathcal{F}[.]$ désigne l'opération de filtrage.

a) Montrer que $y(t)$ s'écrit

$$y_1(t) = B\cos(2\pi f_0 t + \phi),$$

où (B, ϕ) est un couple amplitude/phase que l'on prendra soin de déterminer en fonction du module $M(f)$ et de la phase $\phi(f)$ de la fonction de transfert $H(f)$. On rappelle qu'une fonction de transfert $H(f)$ peut toujours se décomposer sous la forme $H(f) = M(f)e^{j\phi(f)}$, où $M(f)$ est une fonction paire et $\phi(f)$ est une fonction impaire.

b) Déterminer la puissance de $y_1(t)$. En déduire une méthode permettant d'identifier $M(f)$ à partir des mesures des puissances de plusieurs signaux de la forme $x_1(t)$ et $y_1(t)$.

c) Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $y_1(t)$.

2) On suppose désormais que le signal sinusoidal possède une phase aléatoire θ uniforme sur $[0, 2\pi[$ tel que

$$x_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

et on construit le signal $y_2(t) = \mathcal{F}[x_2(t)]$.

a) Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $y_2(t)$.

b) En déduire la puissance de $y_2(t)$ et une méthode permettant d'identifier $M(f)$ à partir des mesures des puissances de plusieurs signaux de la forme $x_2(t)$ et $y_2(t)$.

Exercice 2 : Echantillonnage

Soit $x(t)$ un signal déterministe de puissance finie de transformée de Fourier $X(f)$ à support borné $[-B, +B]$. On échantillonne ce signal à la fréquence $f_e = 1/T_e$.

1) Rappeler l'expression du signal échantillonné idéal $x_e(t)$ et de sa transformée de Fourier $X_e(f)$

2) On filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et on obtient le signal $x_r(t)$. Donner l'expression de $x_r(t)$ en fonction des échantillons $x(kT_e), k \in \mathbb{Z}$ et de $h(t)$. On suppose dans la suite de cette question que $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe bas idéal de fonction de transfert $H(f) = \Pi_{f_e}(f)$ définie par :

$$H(f) = \Pi_{f_e}(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad -\frac{f_e}{2} \leq f \leq \frac{f_e}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter graphiquement $X(f), X_e(f), X_r(f) = TF[X_r(t)]$ lorsque $f_e > 2B$ et comparer alors $x(t)$ et $x_r(t)$.

3) Justifier le fait que tout signal à bande limitée peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie des échantillons $x(kT_e), k \in \mathbb{Z}$.

4) On pose

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k x(t - kT_e)$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Montrer que $s(t) = x(t) - u_n(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire invariant dans le temps d'entrée $x(t)$ et de fonction de transfert $T(f)$ à préciser.
5) Déterminer la densité spectrale de puissance de $s(t)$ et sa puissance P_s. En supposant $f_e > 6B$, montrer que

$$2\sin(\pi f T_e) < 1, \forall f \in [-B, +B]$$

et en déduire que $u_n(t)$ tend vers $x(t)$ lorsque $n \to +\infty$.
6) Justifier le fait qu'un signal à bande limitée $x(t)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de ses valeurs passées $x(t - kT_e)$

Rappel : $(1-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b^k$.

Exercice 3 : Filtrage non-linéaire

On considère un filtre non linéaire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini comme suit :

$$Y(t) = \exp\left[a + bX(t)\right],$$

où a et b sont des constantes. On suppose dans cet exercice que l'entrée du filtre est un bruit blanc (de moyenne nulle) Gaussien de variance σ^2.
1) Expliquer les termes **blanc** et **Gaussien.**
2) Déterminer $E\left[Y(t)\right]$ et $E\left[Y^2(t)\right]$.

Indication : on rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Z de loi gaussienne $N\left(0,\sigma^2\right)$ est :

$$E\left[e^{tZ}\right] = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sigma^2\right)$$

3) Exprimer la densité de probabilité du couple $(X(t), X(t-\tau))$ en fonction de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ notée $R_X(\tau)$ et de la variance de $X(t)$ notée σ^2. En déduire que $Y(t)$ est un processus aléatoire stationnaire dont la fonction d'autocorrélation dépend uniquement de $a, b, R_X(\tau)$ et de σ^2.

Indication: on rappelle que la densité d'un vecteur Gaussien (U, V) de moyenne nulle s'écrit

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u,v)\,\Sigma^{-1}\,(u,v)^T\right]$$

où Σ est la matrice de covariance de (U, V).
4) En appliquant le théorème de Price, calculez la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de l'entrée notée $R_X(\tau)$ (on prendra soin de déterminer la constante intervenant lorsqu'on intègre l'équation différentielle liant $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$).
5) Déterminer la moyenne et la variance de la variable aléatoire $Z(t,\tau) = X(t) + X(t-\tau)$ en fonction de σ^2 et de $R_X(\tau)$. Exprimer $Y(t)Y(t-\tau)$ en fonction de a, b et $Z(t,\tau)$. En déduire la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ et vérifier que l'expression obtenue est en accord avec celle trouvée à la question précédente.

Transformée de Fourier

$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

T.F.

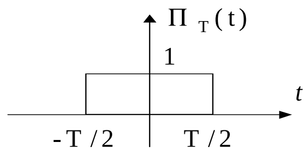
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

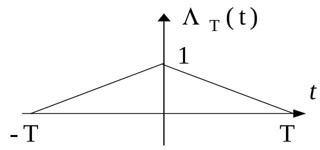
Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1 \\ \delta(t-t_0)\,f(t) &= \delta(t-t_0)\,f(t_0) \\ \delta(t-t_0)*f(t) &= f(t-t_0) \end{aligned}$$