**Exercice 2 : Suivi de cibles**

On considère dans cet exercice un problème simple où on désire estimer la position d'une cible qui se déplace avec vitesse constante dans un plan. On appelle $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la position de la cible à l'instant $t$ et on note sa vitesse $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ qui est bien inconnue. Si la cible se déplace à vitesse constante, on a en théorie $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t) = 0$. Pour modéliser les faibles variations d'accélération, on pose

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= w_x(t) \\ \ddot{y}(t) &= w_y(t) \end{aligned}$$

où $w(t) = \begin{pmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur aléatoire de moyenne nulle de matrice de variance-covariances

$$E\left[w(t)w^T(t)\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = Q_c$$

1) Montrer qu'une telle modélisation admet la représentation d'état

$$\dot{\underline{X}}(t) = A\underline{X}(t) + Bw(t) \tag{1}$$

où $\underline{X}(t) = \left(x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)\right)^T$ et $A$ et $B$ sont deux matrices que l'on précisera. Pour compléter le modèle, on considère l'équation d'observation suivante

$$\begin{aligned} z(t) &= C\underline{X}(t) + b(t) \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $b(t)$ est le bruit de mesure supposé aléatoire de moyenne nulle et de matrice de variance-covariances

$$E\left[b(t)b^T(t)\right] = \begin{pmatrix} \theta_x^2 & 0 \\ 0 & \theta_y^2 \end{pmatrix}$$

2) L'équation d'état en temps continu admet la solution classique

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-u)}Bw(u)du \qquad t > t_0$$

que l'on discrètise en posant $t_0 = nT$ et $t = nT + T$ :

$$\begin{aligned} X((n+1)T) &= e^{AT}X(nT) + w(n) \\ w(n) &= \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A(nT+T-u)}Bw(u)du \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de $A$ trouvée précédemment et en effectuant un développement de Taylor de $e^{AT}$, montrer que

$$e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dernière étape de la discrètisation de l'équation d'état consiste à déterminer la matrice de variances-covariances de $w(n)$. En utilisant le fait que $w(t)$ est un bruit blanc de tel que $E\left[w(u)w(v)\right] = Q_c\delta\left(u - v\right)$, montrer que

$$Q(n) = E\left[w(n)w^T(n)\right] = \int_0^T e^{Av} B Q_c B^T e^{A^T v} dv$$

Montrer alors à l'aide d'un développement de Taylor que

$$Q(n) \simeq \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \frac{T^3}{3} & \sigma_x^2 \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ \sigma_x^2 \frac{T^2}{2} & \sigma_x^2 T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y^2 \frac{T^3}{3} & \sigma_y^2 \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & \sigma_y^2 \frac{T^2}{2} & \sigma_y^2 T \end{pmatrix}$$

L'équation d'observation se discrètise de façon similaire pour donner

$$z(n) = C\underline{X}(n) + b(n)$$

où $b(n)$ est un bruit de matrice de variances-covariances

$$R \simeq \begin{pmatrix} \frac{\theta_x^2}{T} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_y^2}{T} \end{pmatrix}$$

# TARGET TRACKING

Considérons un problème simple où la cible se déplace avec vitesse constante et pour laquelle les mesures sont 2D i.e $(x, y)$

## Construction du modèle

Soit $\begin{pmatrix} x_c(t) \\ y_c(t) \end{pmatrix}$ la position de la cible à l'instant $t$

$$\dot{x}_c(t) = V_x$$

$$\dot{y}_c(t) = V_y$$

En pratique, on ne connait pas $V_x$ et $V_y$ et donc il faut les estimer.

On dérive encore une fois $\begin{cases} \ddot{x}_c(t) = 0 \\ \ddot{y}_c(t) = 0 \end{cases}$

On pose alors $X(t) = [x_c(t), \dot{x}_c(t), y_c(t), \dot{y}_c(t)]^T$ - Le vecteur d'état indique la position et la vitesse de la cible - Le modèle d'état s'écrit alors

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} X(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_W} \underbrace{\begin{pmatrix} w_{cx}(t) \\ w_{cy}(t) \end{pmatrix}}_{w_c(t)}$$

$w_{cx}(t)$ et $w_{cy}(t)$ modélisent les "dérives" d'accélération - On suppose que la covariance de $w_c(t)$ est

$$Q_c = \begin{bmatrix} \sigma^2_{w_{cx}} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{w_{cy}} \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure est

$$Z_c(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(t)}_{\text{position exacte de la cible}} + \underbrace{v_c(t)}_{\text{bruit}}$$

avec $v_c(t) = \begin{bmatrix} v_{cx}(t) \\ v_{cy}(t) \end{bmatrix}$ et $R_c = \begin{bmatrix} \sigma^2_{v_{cx}} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{v_{cy}} \end{bmatrix}$

# Discrétisation

$$\underline{X}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ \dot{x}(n) \\ y(n) \\ \dot{y}(n) \end{pmatrix}$$

Soit T la période d'échantillonnage. Considérons un pb plus général

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,w(t) & (A.1) \\ y(t) = C\,x(t) & (A.2) \end{cases}$$

La solution de (A.1) est $x(t) = e^{A(t-t_0)}\,x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\,w(\tau)\,d\tau}_{\text{solution particulière}}$ $t > t_0$

Echantillonnage à la période T. $t = nT + T$ et $t_0 = nT$

$$x(nT+T) = e^{AT}\,x(nT) + \int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-\tau)} B\,w(\tau)\,d\tau$$

Si $w(\tau)$ est à peu près constant sur l'intervalle $[nT, nT+T]$, on a

$$x(nT+T) \simeq e^{AT}\,x(nT) + w(nT) \underbrace{\int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-\tau)} B\,d\tau}_{\Gamma}$$

on a par chgt de variable $\Gamma = \int_0^T e^{A(T-u)} B\,du \underset{v = T-u}{=} \boxed{\int_0^T e^{Av} B\,dv = \gamma}$

$u = \tau - nT$

Si on pose $\Phi = e^{AT}$, on a

$$\boxed{x(nT+T) = \Phi\,x(nT) + \Gamma\,w(nT)} \quad (A.10)$$

De plus

$$\boxed{y(nT) = C\,x(nT)} \quad (A.11)$$

Pour notre problème, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad AT = \begin{bmatrix} 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{AT} = I + AT + \dots \simeq \boxed{\begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Phi}$$

discretized state-transition matrix

(Discretized) covariance matrix of $w(n)$

$$w(n) = \int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-u)} B\, w_c(u)\, du$$

si $w_c(t)$ est un bruit blanc, puisque les intervalles d'intégration pour $w(n)$ et $w(n+1)$ sont disjoints, $w(n)$ est aussi un bruit blanc

$$Q(n) = E\left[w(n) w^T(n)\right]$$

$$= \int_{nT}^{nT+T} \int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-u)} B \underbrace{E\left[w_c(u) w_c^T(v)\right]}_{Q_c(u)\,\delta_c(u-v)} B^T e^{A^T(nT+T-v)}\, du\, dv$$

$$= \int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-u)} B\, Q_c(u)\, B^T e^{A^T(nT+T-u)}\, du$$

$$= \int_0^T e^{Av} B\, Q_c(nT+T-v)\, B^T e^{A^T v}\, dv$$

$v = nT+T-u$

$$B Q_c B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2_{w_{cx}} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{w_{cy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & \sigma^2_{w_{cx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{w_{cy}} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{w_{cx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{w_{cy}} \end{bmatrix}$$

## Calcul de $Q(n)$

$$e^{A\tau} = I + A\tau + \cdots \sim I + A\tau$$

$$e^{A^T\tau} = I + A^T\tau + \cdots \sim I + A^T\tau$$

donc $e^{A\tau} M e^{A^T\tau} = (I + A\tau + \cdots) M (I + A^T\tau + \cdots)$

en ne gardant que les termes prépondérants on obtient

$$\int_0^T (M + A\tau M + MA^T\tau + A\tau M A^T \tau)\, d\tau =$$

$$MT + AM\frac{T^2}{2} + MA^T\frac{T^2}{2} + AMA^T\frac{T^3}{3} \cdots$$

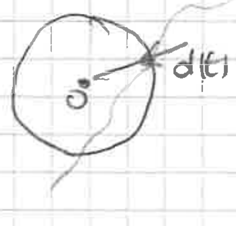
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{wcx}T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{wcy}T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{T^2}{2}\sigma^2_{wcx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T^2}{2}\sigma^2_{wcy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma^2_{wcx}\frac{T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{wcy}\frac{T^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sigma^2_{wcx}\frac{T^3}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{wcy}\frac{T^3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où le $Q$ de l'équation (7.5) p. 227

## Commentaires sur le programme de Patrice

Au lieu d'estimer $(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))$, Patrice estime la distance entre la cible et l'origine $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, $v(t) = \dot{d}(t)$ qui est la vitesse ....




voir programmes dans E:\COURS\TS\MODAP\KALMAN\TRACKINGPATRICE\ Gotracking