INP ENSEEIHT

MODAP 4 : Filtre Adapté en Télécommunications

On considère la transmission de deux symboles

$$
\begin{aligned}
s_0(t) &= A \qquad t \in [0, T] \\
s_1(t) &= -A \qquad t \in [0, T]
\end{aligned}
$$

à travers un canal à bruit blanc additif Gaussien. Le signal reçu s'écrit donc

$$x(t) = s_i(t) + n(t) \qquad i = 1, 2 \text{ et } t \in [0, T]$$

où $n(t)$ est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de DSP $s_n(f) = \frac{N_0}{2}$. Les filtres adaptés à $s_0(t)$ et $s_1(t)$ étant les mêmes à une constante multiplicative près, on se propose de filtrer le signal reçu par un seul filtre adapté de réponse impulsionnelle $h(t)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}} h^2(u)du = 1$ et de prendre une décision à l'instant $t_0 = T$.

$s_0(t) * h(t) = A\,\Pi_T(t - \frac{T}{2}) * \frac{1}{\sqrt{2}}\Pi_T(t - \frac{T}{2})$

– utiliser $\Pi * \Pi = T\Lambda$

1) Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre adapté $h(t)$.

2) Quelle est la sortie de ce filtre adapté lorsque l'entrée du filtre est $s_0(t)$? Même question lorsque l'entrée est $s_1(t)$. On notera $y_{s_i}(T)$ la sortie du filtre correspondant à $s_i(t)$.

3) Montrer que la sortie du filtre adapté lorsque l'entrée est $n(t)$ s'écrit :

$$y_n(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T n(u)du$$

Déterminer la moyenne et la variance de $y_n(T)$.

4) Dans l'hypothèse où $n(t)$ est un bruit blanc Gaussien, déterminer la loi de la sortie du filtre adapté à l'instant T, c'est-à-dire la loi de la variable aléatoire $r = y_{s_i}(T) + y_n(T)$ (on rappelle que le caractère Gaussien est conservé par filtrage linéaire).

5) En supposant que les symboles $s_0(t)$ et $s_1(t)$ ont pour probabilités a priori $P_0 = p$ et $P_1 = 1-p$, déterminer $P[\ s_0(t) \text{ émis}|\, r]$ et $P[\ s_1(t) \text{ émis}|\, r]$. En déduire une stratégie permettant de décider lequel des deux symboles $s_0(t)$ et $s_1(t)$ a été émis à partir de la sortie du filtre adapté r. Que donne cette stratégie lorsque $p = \frac{1}{2}$?

MODAP4 : Filtre Adapté

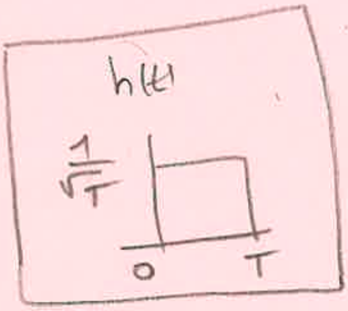
1) $h(t) = k\, s^*(T-t)$

$\Rightarrow AK = H$

$\int_{\mathbb{R}} h^2(t)\,dt = 1$

$\int_0^T H^2\,dt = 1 \Rightarrow H^2 T = 1$

$H = \frac{1}{\sqrt{T}}$



2) $y_{S_0}(t) = S_0(t) * h(t)\Big|_{t=T} = \int_0^T A\, h(\underbrace{T-u}_{v})\,du = A\int_0^T h(v)\,dv = \boxed{A\sqrt{T}}$

$y_{S_1}(T) = \boxed{-A\sqrt{T}}$

3) $y_n(T) = \int_0^T n(u)\, h(T-u)\,du = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T n(u)\,du$

$E[y_n(T)] = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \underbrace{E[n(u)]}_{0}\,du = 0$

$E[y_n^2(T)] = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \underbrace{R_n(u-v)}_{\frac{N_0}{2}\delta(u-v)}\,du\,dv$

$= \frac{N_0}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \Big[\underbrace{\int_0^T \delta(u-v)\,du}_{1}\Big]\,dv = \boxed{\frac{N_0}{2}}$

4) si $S_0(t)$ émis $\quad r \sim N(A\sqrt{T}, \frac{N_0}{2})$

si $S_1(t)$ émis $\quad r \sim N(-A\sqrt{T}, \frac{N_0}{2})$

5) $P_0 = P[S_0(t) \text{ émis}] = p$

$P_1 = P[S_1(t) \text{ émis}] = 1-p$

$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

$$P[S_0(t) \text{ émis} \mid r] = \frac{P[r \mid S_0(t) \text{ émis}]\,p}{P[r]}$$

$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

$$P[S_1(t) \text{ émis} \mid r] = \frac{P[r \mid S_1(t) \text{ émis}]\,(1-p)}{P(r)}$$

on décide que $S_0(t)$ a été émis si $P[S_0(t) \text{ émis} \mid r] > P[S_1(t) \mid r]$

$$p \, \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi \frac{N_0}{2}}}} \exp\left(-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{(r - A\sqrt{T})^2}{\frac{N_0}{\cancel{2}}}\right) > \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi N_0}}} \exp\left(-\frac{1}{N_0}(r + A\sqrt{T})^2\right)(1-p)$$

$$-\frac{1}{N_0}(r - A\sqrt{T})^2 + \ln p > -\frac{1}{N_0}(r + A\sqrt{T})^2 + \ln(1-p)$$

$$-\frac{1}{N_0}(\cancel{r^2} + \cancel{A^2 T} - 2rA\sqrt{T}) + \frac{1}{N_0}(\cancel{r^2} + \cancel{A^2 T} + 2Ar\sqrt{T}) > \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

$$\frac{1}{N_0} 4rA\sqrt{T} > \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

$$\boxed{r > \frac{N_0}{4A\sqrt{T}} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}$$

$p = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1-p}{p} = \frac{1/2}{1/2} = 1$ donc on décide que $S_0(t)$ émis si $\boxed{r > 0}$

<u>Remarque</u> : prendre l'instant de décision $t_0 = T$ assure un filtre adapté causal, ce qui n'est pas le cas pour $t_0 < T$!!