A

Ex1

1) $L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta^p \Gamma(p)} \frac{1}{x_i^{p+1}} \exp\left(-\frac{1}{\theta x_i}\right)$

$$= \frac{1}{\theta^{np}\Gamma^n(p)} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{p+1}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$$

Donc $\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = -np\ln\theta + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ + quantité indépendante de θ

On en déduit

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{-np}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

On peut étudier les variations de la fonction $\ln L$ puisque

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} \geq 0 \iff -\frac{np}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geq 0 \iff \theta \leq \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

On a

θ	0		$\frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$		$+\infty$
$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}$		$+$	0	$-$	
$\ln L$		$\nearrow$		$\searrow$	

(1pt)

ce qui montre que $\theta = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ est un maximum global unique de $L(x_1,\dots,x_n;\theta)$. On en déduit

(1pt)

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

2) On effectue un changement de variables pour trouver la loi de $Y_i = \frac{1}{X_i}$

La densité de Y_i est

$$\pi(y_i) = \frac{1}{\theta^{*p}\Gamma(p)}\, y_i^{p+1} \exp\left(-\frac{y_i}{\theta}\right)\left|\frac{dx_i}{dy_i}\right|$$

Le Jacobien est $\left|\frac{dx_i}{dy_i}\right| = \left|-\frac{1}{y_i^2}\right| = \frac{1}{y_i^2}$ et le changement de variables est bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On en déduit

(1pt)

$$\boxed{\pi(y_i) = \frac{y_i^{p-1}}{\theta^p\Gamma(p)} \exp\left(-\frac{y_i}{\theta}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y_i)}$$

qui est bien la densité d'une loi $\Gamma(\theta^*, v)$ avec $\theta^* = \frac{1}{\theta}$ et $v = p$ B)

On en déduit à l'aide des tables

$$E[Y_i] = \frac{v}{\theta^*} = p\theta$$
$$Var(Y_i) = \frac{v}{(\theta^*)^2} = p\theta^2$$

3) $E[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(Y_i)}_{p\theta} = \theta$ donc $\hat{\theta}_{MV}$ est un estimateur

0,5 non biaisé du paramètre θ

1 $Var\, \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n^2p^2} \sum_{i=1}^{n} Var\, Y_i = \frac{np\theta^2}{n^2p^2} = \boxed{\frac{\theta^2}{np}}$

$Y_1, \dots, Y_n$ va ind

Puisque $\hat{\theta}_{MV}$ est non biaisé et que $Var\, \hat{\theta}_{MV} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\hat{\theta}_{MV}$ est un estimateur convergent de θ

0,5

4) La borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de θ est définie par

$$BCR(\theta) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right]}$$

On a vu $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{-np}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$

donc $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \frac{np}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$

et finalement $E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right] = \frac{np}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(Y_i)}_{p\theta} = \frac{-np}{\theta^2}$

Soit $\boxed{BCR(\theta) = \frac{\theta^2}{np}}$

1pt

$Var\, \hat{\theta}_{MV} = BCR\theta$
$\hat{\theta}_{MV}$ non biaisé $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_{MV}$ est l'estimateur efficace de θ

0,5

5) La vraisemblance $L(x_1, \dots x_n ; p, \theta)$ est définie par (voir question 1) (c)

$$L(x_1, \dots x_n ; p, \theta) = \frac{1}{\theta^{np}\Gamma^n(p)} \frac{1}{\prod x_i^{p+1}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance du couple (p, θ) se détermine en cherchant la ou les solutions du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial p} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

~~Comme~~ En raison de la fonction $\Gamma^n(p)$, la première équation $\frac{\partial L}{\partial p} = 0$ (ou $\frac{\partial \ln L}{\partial p} = 0$) n'admet pas de solution simple

0,5

On a vu $E[Y_i] = M_1 = \boxed{p\theta}$

et $E[Y_i^2] = M_2 = \operatorname{Var} Y_i + E^2[Y_i] = \boxed{p\theta^2 + p^2\theta^2}$

On peut donc exprimer p et θ en fonction de M_1 et M_2.
Des calculs élémentaires conduisent à

$$\boxed{\begin{aligned} \theta &= \frac{M_2 - M_1^2}{M_1} \\ p &= \frac{M_1}{\theta} = \frac{M_1^2}{M_2 - M_1^2} \end{aligned}}$$

1pt

On en déduit

$$\boxed{\hat{\theta}_{MO} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

1pt

$$\boxed{\hat{p}_{MO} = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

1pt

$(\hat{\theta}_{MO}, \hat{p}_{MO})$ estimateur convergent de (θ, p) mais étude du biais difficile

Ex 2

1) En utilisant l'indépendance mutuelle des variables $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$, on obtient

1pt

$$L(x,y;\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right] \times \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(y_j-\mu)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

2) Le Théorème de Neyman-Pearson est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(x,y;\mu_1)}{L(x,y;0)} > S_\alpha$$

ce qui conduit à rejeter H_0 si

$$-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu_1)^2 + \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1} x_i^2 + \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1} y_j^2 > K_\alpha$$

Soit

$$-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(-2\mu_1\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_1^2\right) - \frac{1}{2\sigma_2^2}\left(-2\mu_1\sum_{j=1}^{m} y_j + n\mu_1^2\right) > K_\alpha$$

c'est-à-dire

$$\mu_1\left[\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m} y_j\right] > K'_\alpha$$

Comme $\mu_1 < 0$, on en déduit

$$\boxed{\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T_n = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1} X_i + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1} Y_j \;\cancel{>}< A_\alpha}$$

2pts

3) En utilisant les résultats classiques sur les vecteurs gaussiens, on sait que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma_1^2)$ et $\sum_{j=1}^{m} Y_j \sim N(m\mu, m\sigma_2^2)$

En utilisant l'indépendance de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\sum_{j=1}^{m} Y_j$, on a

$$\boxed{T_n \sim N\left(\left(\frac{n}{\sigma_1^2}+\frac{m}{\sigma_2^2}\right)\mu,\ \frac{n}{\sigma_1^2}+\frac{m}{\sigma_2^2}\right)}$$

Donc sous H_0 $\quad T \sim N(0, \theta^2)$ avec $\theta^2 = \frac{n}{\sigma_1^2} + \frac{m}{\sigma_2^2} = \frac{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$

2pts

sous H_1 $\quad T \sim N(\theta^2\mu, \theta^2)$

4) $\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = P[T_n < A_\alpha \mid T_n \sim N(0, \theta^2)]$

2

d'où

$$\alpha = P\left[\frac{T_n}{\theta} < \frac{A_\alpha}{\theta} \mid \frac{T_n}{\theta} \sim N(0,1)\right]$$

c'est à dire

$$\alpha = F\left[\frac{A_\alpha}{\theta}\right] = \boxed{F\left[\frac{A_\alpha \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}}\right]}$$

1pt

De la même façon

$$\beta = P[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}] = P[T_n \geq A_\alpha \mid T_n \sim N(\theta^2 \mu_1, \theta^2)]$$

Soit

$$\beta = P\left[\frac{T_n - \theta^2 \mu_1}{\theta} \geq \frac{A_\alpha - \mu_1 \theta^2}{\theta} \mid \frac{T_n - \theta^2 \mu_1}{\theta} \sim N(0,1)\right]$$

$$\beta = 1 - F\left[\frac{A_\alpha - \mu_1 \theta^2}{\theta}\right]$$

Finalement

$$\boxed{\beta = 1 - F\left[\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}} \left(A_\alpha - \mu_1 \frac{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}\right)\right]}$$

1pt

5) Les courbes COR sont définis par $\Pi = 1 - \beta$ en fonction de α

D'après la question précédente

$$A_\alpha = F^{-1}(\alpha) \frac{\sqrt{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

et

$$\Pi = 1 - \beta = F\left[\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}} \left(A_\alpha - \mu_1 \frac{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}\right)\right]$$

En remplaçant A_α dans l'expression de Π, on obtient

$$\boxed{\Pi = F\left[F^{-1}(\alpha) - \mu_1 \frac{\sqrt{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}}{\sigma_1 \sigma_2}\right]}$$

1pt

Performance du test en fonction de μ_1 (

Comme $\mu_1 < 0$, plus μ_1 diminue, plus $-\mu_1$ augmente et plus la puissance du test augmente, ce qui est naturel

Analyse du test en fonction de n, m, σ_1^2 et σ_2^2

Comme le montre l'expression de la puissance du test, les performances sont liées à la valeur de $SNR = \frac{\sqrt{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}}{\sigma_1\sigma_2}$ qu'on appelle parfois rapport signal sur bruit du test

Plus SNR augmente, plus $\underbrace{(-k_1)}_{>0}$ SNR augmente et donc plus le test est puissant.

2pts