Ex1

1) La vraisemblance de $(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[ \theta (1-\theta)^{x_i - 1} \right] = \boxed{\theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}}$$

et son logarithme est

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = n \ln \theta + \left(\sum x_i - n\right) \ln(1-\theta)$$

dont on peut étudier les variations

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \geq 0 \iff \frac{n}{\theta} - \frac{\sum x_i - n}{1-\theta} \geq 0$$

Puisque $\theta \in ]0,1[$, on a $\theta > 0$ et $1-\theta > 0$ d'où en multipliant par $\theta(1-\theta)$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \geq 0 \iff n(1-\theta) - \theta\left(\sum x_i - n\right) \geq 0 \iff \boxed{\theta \leq \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}}}$$

avec $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

On a donc le tableau de variations suivant

| $\theta$ | $0$ | | $\frac{1}{\bar{x}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\ln L$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

ce qui montre que $\theta = \frac{1}{\bar{x}}$ est le maximum global unique de la log vraisemblance et donc de la vraisemblance.

2) L'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est asymptotiquement sans biais, convergent et asymptotiquement efficace. Par contre, l'étude des propriétés de $\hat{\theta}_{MV}$ pour $n$ fini est délicate. En utilisant le principe d'invariance fonctionnelle, on obtient

$$\hat{a}_{MV} = \frac{1}{\hat{\theta}_{MV}} = \bar{X} = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Les propriétés de cet estimateur sont simples à étudier puisque

$$E[\hat{a}_{MV}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\frac{1}{\theta} = a} = a \Rightarrow \hat{a}_{MV} \text{ non biaisé}$$

$$\underset{X_1, \dots, X_n \text{ ind}}{Var[\hat{a}_{MV}] =} \frac{Var(X_i)}{n} = \frac{1-\theta}{n\theta^2} = \frac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{n}{a^2}} = \boxed{\frac{a(a-1)}{n}}$$

Biais$(\hat{a}_{MV}) = 0$
$Var[\hat{a}_{MV}] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
$\Rightarrow$ donc l'estimateur $\hat{a}_{MV}$ est convergent

3) Efficacité

La borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé de a est

$$BCR = \frac{[1+b'(a)]^2}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right]} = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right]}$$

La vraisemblance peut se réécrire en fonction de a de la manière suivante

$$L(x_1,\dots,x_n; a) = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{\Sigma x_i - n}$$

D'où

$$\ln L = -n \ln a + (\Sigma x_i - n)\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = -\frac{n}{a} + \frac{\Sigma x_i - n}{1-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{-n}{a} + \frac{\Sigma x_i - n}{a^2 - a}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = \frac{n}{a^2} + (\Sigma x_i - n)\left[\frac{-(2a-1)}{a^2(a-1)^2}\right]$$

Mais $E[\Sigma X_i - n] = n E[X_i] - n = na - n = n(a-1)$, d'où

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right] = \frac{n}{a^2} + \frac{(1-2a)n}{a^2(a-1)} = \frac{n}{a^2(a-1)}\left[a - \cancel{1} + \cancel{1} - 2a\right] = \frac{-n}{a(a-1)}$$

d'où la borne $\boxed{BCR = \frac{a(a-1)}{n}}$

On en déduit que l'estimateur $\hat{a}_{MV}$ est l'estimateur efficace de a

4) D'après la loi de Bayes, on a

$$p(\theta \mid x_1,\dots,x_n) \propto p(x_1,\dots,x_n \mid \theta)\, p(\theta)$$

$$\propto \theta^n (1-\theta)^{\Sigma x_i - n} \times \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

$$\propto \theta^{n+\alpha-1}(1-\theta)^{\Sigma x_i + \beta - n - 1}$$

C'est une loi beta $\boxed{\mathcal{B}\left(n+\alpha, \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta - n\right)}$

L'estimateur MAP maximise la loi a posteriori et vérifie donc

$$\frac{\partial p(\theta \mid x_1,\dots,x_n)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \ln p(\theta \mid x_1 \dots x_n)}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left[(n+\alpha-1)\ln\theta + (\Sigma x_i + \beta - n - 1)\ln(1-\theta)\right] = 0$$

d'où

$$\frac{n+\alpha-1}{\theta} - \frac{\Sigma x_i + \beta - n - 1}{1-\theta} = 0$$

En multipliant tout par $\theta(1-\theta)$, on obtient

$$(1-\theta)(n+\alpha-1) - \theta(\Sigma x_i + \beta - n - 1) = 0$$

Soit

$$n+\alpha-1 + \theta(\cancel{-n} - \alpha + 1 - \Sigma x_i - \beta \cancel{+n} + 1) = 0$$

d'où

$$\boxed{\theta = \frac{n+\alpha-1}{\Sigma x_i + \alpha + \beta - 2}}$$

On en déduit $\boxed{\hat{\theta}_{MAP} = \dfrac{n+\alpha-1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha+\beta-2}}$

On peut réécrire $\hat{\theta}_{MAP}$ sous la forme

$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{1 + \frac{\alpha-1}{n}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\alpha+\beta-2}{n}} \underset{?}{\sim} \frac{1}{\overline{x}} = \hat{\theta}_{MV}$$

Comme d'habitude, $\hat{\theta}_{MAP}$ se comporte comme $\hat{\theta}_{MV}$ pour $n$ grand. ($n \to +\infty$)

---

Exercice 1 : <u>Remarque</u> : la remarque ci-dessus est intéressante, même si <u>elle n'était pas demandée à l'examen</u>. Elle provient d'un rapport technique de Stanley L. Sclove et John Van Ryzin intitulé "Some estimation problems related to a geometric distribution and a sum of two independent non-identically distributed random variables"

Le développement de Taylor de $\frac{1}{t}$ autour de $\frac{1}{t_0}$ s'écrit

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_0} + \frac{t-t_0}{-t_0^2} + \frac{(t-t_0)^2}{t_0^3} - \frac{(t-t_0)^3}{t_0^4} + \cdots$$

et il est valable au voisinage de $t_0$.

Quand on l'applique à $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $t_0 = E(X_i) = \frac{1}{\theta}$, on obtient

$$\frac{1}{\overline{x}} = \theta - \theta^2\left(\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right) + \theta^3\left(\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right)^2 - \theta^4\left(\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right)^3 + \cdots$$

D'où

$$E\left[\frac{1}{\overline{x}}\right] = \theta + 0 + \theta^3 E\left[\left(\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right)^2\right] - \theta^4 E\left[\left(\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right)^3\right] + \cdots$$

Mais $E\left[\left(\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right)^2\right] = \mathrm{Var}\,\overline{x} = \frac{\mathrm{Var}\,X_i}{n} = \boxed{\frac{1-\theta}{\theta^2 n}}$

De même $E\left[\left(\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right)^3\right] = E\left[\left\{\frac{1}{n}\Sigma\left(X_i - \frac{1}{\theta}\right)\right\}^3\right] = \frac{1}{n^3}\sum_i\sum_j\sum_k E\left[\left(X_i - \frac{1}{\theta}\right)\left(X_j - \frac{1}{\theta}\right)\left(X_k - \frac{1}{\theta}\right)\right]$

Tous les termes de la somme sont nuls sauf pour $i=j=k$. On obtient donc

$$E\left[\left(\overline{X} - \frac{1}{\theta}\right)^3\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\left(X_i - \frac{1}{\theta}\right)^3\right] = \frac{\mu^3}{n^2}$$

d'où $E\left[\frac{1}{\bar{X}}\right] = \theta + \frac{1-\theta}{n\theta^2} \times \theta^3 - \frac{\theta^4 \mu_3}{n^2} + \cdots$

$$= \boxed{\theta + \frac{\theta(1-\theta)}{n} - \frac{\mu_3 \theta^4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Ceci permet de montrer que $\frac{1}{\bar{X}}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\theta$ et que sa variance asymptotique est $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$, qui est la borne de Cramer-Rao pour le paramètre $\theta$

---

2) Exercice 2

1) Le test de Neyman Pearson s'écrit $\boxed{\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(x_1,\dots,x_n;\theta_1)}{L(x_1,\dots,x_n;\theta_0)} > S_\alpha}$

c'est-à-dire

Rejet de $H_0$ si $\frac{\theta_1^n}{\theta_0^n} \frac{(1-\theta_1)^{\sum x_i - n}}{(1-\theta_0)^{\sum x_i - n}} > k_\alpha \iff \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) > S_\alpha$

si $\theta_1 > \theta_0$, alors $1-\theta_1 < 1-\theta_0$ donc $\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} < 1$ donc $\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) < 0$ donc

$\boxed{\text{on rejette } H_0 \text{ si } \sum_{i=1}^n X_i < \mu_\alpha}$

si $\theta_1 < \theta_0$, alors $\boxed{\text{on rejette } H_0 \text{ si } \sum_{i=1}^n X_i > \mu_\alpha}$

2) D'après le théorème de la limite centrale, pour $n$ grand, on peut approcher la loi de $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ par une loi normale de moyenne $nE[X_i] = \frac{n}{\theta}$ et de variance $n\operatorname{Var} X_i = \frac{n(1-\theta)}{\theta^2}$

donc $\boxed{T_n \underset{n \to \infty}{\sim} N\left(\frac{n}{\theta}, \frac{n(1-\theta)}{\theta^2}\right)}$

3) $\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = P\Big[T_n < \mu_\alpha \mid \underbrace{T_n \sim N\left(\frac{n}{\theta_0}, \frac{n(1-\theta_0)}{\theta_0^2}\right)}_{\theta=\theta_0}\Big]$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = F\left[\frac{\mu_\alpha - \frac{n}{\theta_0}}{\sqrt{\frac{n(1-\theta_0)}{\theta_0^2}}}\right]}$

On en déduit le seuil $\boxed{\mu_\alpha = \frac{\sqrt{n(1-\theta_0)}}{\theta_0} F^{-1}(\alpha) + \frac{n}{\theta_0}}$

4) $\pi = P[\text{rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ vraie}]$

$$= P[T_n < k_\alpha \mid \theta = \theta_1] = \boxed{F\left[\frac{k_\alpha - \frac{n}{\theta_1}}{\sqrt{\frac{n(1-\theta_1)}{\theta_1^2}}}\right]}$$

5) Courbes COR

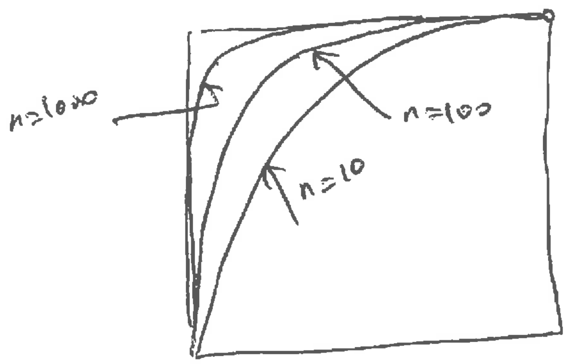
Il suffit de remplacer l'expression de $k_\alpha$ de 3) dans l'expression de $\pi$ trouvée en 4) pour obtenir

$$\pi = F\left[\frac{\frac{n}{\theta_0} - \frac{n}{\theta_1}}{\sqrt{\frac{n(1-\theta_1)}{\theta_1^2}}} + \frac{\theta_1}{\theta_0}\sqrt{\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}\, F^{-1}(\alpha)\right]$$

Soit

$$\boxed{\pi = F\left[\frac{\sqrt{n}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} - 1\right)}{\sqrt{1-\theta_1}} + \frac{\theta_1}{\theta_0}\sqrt{\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}\right]}$$

Plus $n$ est grand, plus $\pi$ est grande, ce qui donne les courbes suivantes




Exercice 3

1) $\phi = \sum_{i=1}^{6} \frac{(k_i - n p_i)^2}{n p_i}$ avec $n = 60$ et $p_i = 10$ soit $n p_i = 10$

d'où $\phi = \frac{1}{10}\left[(10-10)^2 + (8-10)^2 + (10-10)^2 + (15-10)^2 + (5-10)^2 + (12-10)^2\right]$

$= \frac{1}{10}\left[0 + 4 + 0 + 25 + 25 + 4\right] = \boxed{5.8}$

2) $\alpha = P[\phi > k_\alpha \mid \phi \sim \chi^2_5] = 1 - F_{\chi^2_5}(k_\alpha)$

d'où $\boxed{k_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_5}(1-\alpha)}$

$\phi > k_\alpha$ rejet de $H_0$

$k_\alpha$

3) Donc plus $\alpha$ est grand, plus on rejette $H_0$ donc plus $k_\alpha$ est faible

**EXERCICE 3**

$$P[X_i = x_i] = \theta\,(1-\theta)^{x_i - 1} \qquad x_i = 1, 2, \dots$$

1) $p_1 = \theta = 0.4$

$p_2 = \theta(1-\theta) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$

$p_3 = \theta(1-\theta)^2 = 0.4 \times 0.36 = 0.144$

$p_4 = \cancel{0.036}\ 0.216$

2) $$\boxed{\phi_n = \frac{(5-8)^2}{8} + \frac{(6-4.8)^2}{4.8} + \frac{(4-2.88)^2}{2.88} + \frac{(5-4.32)^2}{4.32}}$$

3) $$\boxed{\phi_n \sim \chi^2_{K-1=3}}$$

4) On rejette $H_0$ si $\phi_n > K_\alpha$ avec $\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}]$

Donc

$$\alpha = P[\phi_n > K_\alpha \mid \phi_n \sim \chi^2_3] = 1 - F_{\chi^2_3}(K_\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_3}(1-\alpha)}$$

Barème

**Ex1**

1) $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}}$ + max global unique ① + ① = 2pts

2) ~~propri~~ $\hat{a}_{MV} = \bar{X}$ et $\hat{\theta}_{MV}$ asympt ① 2pt

$E(\hat{a}_{MV}) = a$ ①

$Var[\hat{a}_{MV}] = \frac{a(a-1)}{n}$

3) $BCR = \frac{a(a-1)}{n}$ ② 2pts

4) • $B(n+\alpha, \sum x_i + \beta - n)$ ① 3pts

• $\hat{\theta}_{MAP} = \frac{n+\alpha-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i + \alpha+\beta-2}$ ①

• $\hat{\theta}_{MAP} \sim \frac{1}{\bar{X}} = \hat{\theta}_{MV}$ ①

---

**Ex2**

1) $\theta_1 > \theta_0$ Rejet de $H_0$ si $\sum X_i < k_\alpha$ 2pts

$\theta_1 < \theta_0$ ——— $\sum X_i > k_\alpha$

$E(X_i) = \frac{1}{\theta}$ donc si $\theta_1 > \theta_0$, on rejette $H_0$ si $\underbrace{\sum X_i}_{n \times \text{moyenne}} < k_\alpha$ 1pt

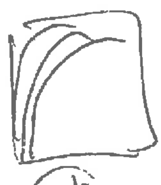
c'est-à-dire si la moyenne est petite, ce qui est normal
i.e $\theta$ grand

2) $T_n \sim N\left(\frac{n}{\theta}, \frac{n(1-\theta)}{\theta^2}\right)$ 1pt

3) $k_\alpha = \frac{1}{\theta_0}\sqrt{n(1-\theta_0)}\, F^{-1}(\alpha) + \frac{n}{\theta_0}$ 1pt

4) $\pi = F\left[\frac{k_\alpha - \frac{n}{\theta_1}}{\frac{1}{\theta_1}\sqrt{n(1-\theta_1)}}\right]$ 1pt

5) $\pi = F\left[\frac{\sqrt{n}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} - 1\right)}{\sqrt{1-\theta_1}} + \frac{\theta_1}{\theta_0}\sqrt{\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}\right]$ 2pts



1pt

1pt

---

**Ex3**

1) $\varphi = 5,8$ ① 3pts

2) $k_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_5}(1-\alpha)$ ①

3) $\alpha \nearrow$ $k_\alpha \searrow$ ①