Ex1 La vraisemblance de $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$ s'écrit $\boxed{1}$

$$L(x,y;\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right) \times \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(y_j-\mu)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

1pt

$$= \boxed{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+m}{2}}} \frac{1}{(\sigma_1^2)^{n/2}(\sigma_2^2)^{m/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu)^2\right]}$$

1pt

La log-vraisemblance s'écrit (à une constante additive près)

$$\ln L(x,y;\mu) = K - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu)^2$$

Sa dérivée est

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) + \frac{1}{\sigma_2^2}\left(\sum_{j=1}^{m} y_j - m\mu\right)$$

$$= \frac{n}{\sigma_1^2}(\bar{x}-\mu) + \frac{m}{\sigma_2^2}(\bar{y}-\mu)$$

Donc

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} \geqslant 0 \iff \frac{n\bar{x}}{\sigma_1^2} + \frac{m}{\sigma_2^2}\bar{y} \geqslant \frac{n\mu}{\sigma_1^2} + \frac{m\mu}{\sigma_2^2} = \mu\left(\frac{n}{\sigma_1^2} + \frac{m}{\sigma_2^2}\right)$$

$$\iff \mu \leq \underbrace{\frac{\frac{n}{\sigma_1^2}}{\frac{n}{\sigma_1^2} + \frac{m}{\sigma_2^2}}}_{\frac{1}{1+\frac{\sigma_1^2 n}{\sigma_2^2 m}}} \bar{x} + \frac{\frac{m}{\sigma_2^2}}{\frac{m}{\sigma_2^2} + \frac{n}{\sigma_1^2}} \bar{y}$$

on pose $\alpha = \dfrac{1}{1+\frac{\sigma_1^2 n}{\sigma_2^2 m}}$ et on remarque $\dfrac{m/\sigma_2^2}{m/\sigma_2^2 + n/\sigma_1^2} = 1-\alpha$ d'où

le tableau de variation

μ	$-\infty$		$\alpha\bar{x} + (1-\alpha)\bar{y}$		$+\infty$
$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}$		$+$	0	$-$	
$\ln L$		$\nearrow$		$\searrow$	

1pt

qui montre que la vraisemblance admet un <u>maximum global unique</u> pour

$$\mu = \alpha\bar{x} + (1-\alpha)\bar{y}.$$

On en conclut

1pt

$$\boxed{\hat{\mu}_{MV} = \alpha \, \overline{X} + (1-\alpha)\, \overline{Y}}$$

0,5

$$E[\hat{\mu}_{MV}] = \alpha \mu + (1-\alpha)\mu = \mu$$

1pt

donc $\hat{\mu}_{MV}$ est un estimateur non biaisé de μ

0,5

En utilisant l'indépendance entre $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, on obtient

$$\mathrm{Var}\, \hat{\mu}_{MV} = \alpha^2 \,\mathrm{Var}\,\overline{X} + (1-\alpha)^2\, \mathrm{Var}\,\overline{Y}$$

1pt

$$\mathrm{Var}\,\hat{\mu}_{MV} = \boxed{\alpha^2 \frac{\sigma_1^2}{n} + (1-\alpha)^2 \frac{\sigma_2^2}{m}}$$

0,5

Lorsque $n = m$, on a $\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ et $1-\alpha = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ qui sont tous deux indépendant de n. Donc

$$\boxed{\mathrm{Var}\,\hat{\mu}_{MV} \xrightarrow[n=m\to+\infty]{} 0}$$

0,5

Rq : Comme $\hat{\mu}_{MV}$ est non biaisé et ~~que~~ $\mathrm{Var}[\hat{\mu}_{MV}] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que $\hat{\mu}_{MV}$ est un estimateur convergent de μ

3) La borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé de μ est

$$BCR(\mu) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L(x,y;\mu)}{\partial \mu^2}\right]}$$

1pt

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma_1^2} - \frac{m}{\sigma_2^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{BCR(\mu) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}}$$

$$= -\frac{n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

1pt

Pour déterminer si $\hat{\mu}_{MV}$ est l'estimateur efficace du paramètre μ, il suffit de vérifier si $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{MV}) = BCR(\mu)$

Mais $\mathrm{Var}[\hat{\mu}_{MV}] = \alpha^2 \frac{\sigma_1^2}{n} + (1-\alpha)^2 \frac{\sigma_2^2}{m}$

$$= \frac{\left(\frac{n}{\sigma_1^2}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{n}}{\left(\frac{n}{\sigma_1^2}+\frac{m}{\sigma_2^2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{m}{\sigma_2^2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{m}}{\left(\frac{n}{\sigma_1^2}+\frac{m}{\sigma_2^2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma_1^2}+\frac{m}{\sigma_2^2}}$$

c'est-à-dire $\boxed{Var[\hat{\mu}_{MV}] = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n\sigma_2^2+m\sigma_1^2} = BCR(\mu)}$

on en déduit que $\hat{\mu}_{MV}$ est l'estimateur efficace du paramètre μ

1pt

4) On a vu que $BCR(\mu) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n\sigma_2^2+m\sigma_1^2}$ $= \cancel{\frac{1}{n}}$

Donc pour $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ on a $BCR_1(\mu) = \frac{\sigma^2}{n+m}$

1pt tandis que pour $\sigma_1^2=2\sigma_2^2=\sigma^2$ on a $BCR_2(\mu) = \frac{\sigma^2}{n+2m}$

Comme $\frac{\sigma^2}{n+2m} < \frac{\sigma^2}{n+m}$, le second cas donne une performance optimale d'estimation (donnée par la borne de Cramér-Rao) meilleure que le premier cas. Ceci s'explique car dans le second cas, le capteur #2 a une variance $\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{2}$ plus faible que dans le premier cas où $\sigma_2^2=\sigma^2$.

Ex2

1) Le test de Neyman-Pearson est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta_0)} > K_{1\alpha}$$

c'est-à-dire (après quelques calculs élémentaires)

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \underbrace{\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)}_{>0 \text{ car } \theta_1>\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i^3 > K_{2\alpha}$$

On en déduit

$$\boxed{\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T_n = \sum_{i=1}^n x_i^3 > S_\alpha}$$

1pt

2) Il suffit d'effectuer un changement de variables

$y_i = \frac{2}{\theta}x_i^3$ est un changement de variables bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$

$$y_i = \frac{2}{\theta}x_i^3 \Leftrightarrow x_i = \left(\frac{\theta}{2}y_i\right)^{1/3}$$

Le Jacobien de cette transformation s'écrit

$$J = \left(\frac{dx_i}{dy_i}\right) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{1/3} \frac{1}{3}\, y_i^{-2/3}$$

On en déduit la densité de y_i

$$\pi(y_i) = \cancel{\frac{3}{\theta}}\, \underbrace{\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2/3} y_i^{2/3}}_{x_i^2} \exp\left(-\frac{y_i}{2}\right) \left(\frac{\theta}{2}\right)^{1/3} \cancel{\frac{1}{3}}\, y_i^{-2/3}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y_i)$$

soit

1pt

$$\boxed{\pi(y_i) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{y_i}{2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y_i)}$$

qui est bien la densité d'une loi du χ^2_2.

Si $Z \sim \chi^2_{n_Z}$ et $T \sim \chi^2_{n_T}$, on a en vertu de l'indépendance entre Z et T

$$\underset{\substack{\text{Fonction caractéristique} \\ \text{de } Z+T}}{\phi_{Z+T}(t)} = E\left[e^{iZt} e^{iTt}\right] = \phi_Z(t)\, \phi_T(t)$$

En utilisant les tables, on obtient $\phi_{Z+T}(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{n_Z}{2}+\frac{n_T}{2}}}$

qui est la fonction caractéristique d'une loi du $\chi^2_{n_Z+n_T}$.

On en déduit $\boxed{T+Z \sim \chi^2_{n_Z+n_T}}$

1pt

3) On sait que $\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = P\left[T_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 > S_\alpha \mid \theta = \theta_0\right]$

Donc

$$\alpha = P\left[\frac{2}{\theta_0} T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\theta_0} x_i^3 > \frac{2}{\theta_0} S_\alpha \;\Big|\; \frac{2}{\theta_0} T_n \sim \chi^2_{2n}\right]$$

Soit $\alpha = 1 - F_{2n}\left(\frac{2}{\theta_0} S_\alpha\right)$, i.e. $\boxed{S_\alpha = \frac{\theta_0}{2} F_{2n}^{-1}(1-\alpha)}$

1pt

4) De la même façon, la puissance du test est

$$\pi = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ vraie}] = P\left[\frac{2}{\theta_1} T_n > \frac{2}{\theta_1} S_\alpha \;\Big|\; \frac{2}{\theta_1} T_n \sim \chi^2_{2n}\right]$$

donc $\boxed{\pi = 1 - F_{2n}\left[\frac{2}{\theta_1} S_\alpha\right]} = \boxed{1 - F_{2n}\left[\frac{\theta_0}{\theta_1} F_{2n}^{-1}(1-\alpha)\right] = \pi}$

1pt

1pt

On observe que la puissance ne dépend que de $\frac{\theta_0}{\theta_1}$.
Plus θ_1 augmente, plus $\frac{\theta_0}{\theta_1}$ diminue. Mais F_{2n} est une fonction croissante (comme toute fonction de répartition).
Donc plus θ_1 augmente, plus $F_{2n}\left[\frac{\theta_0}{\theta_1} F_{2n}^{-1}(1-\alpha)\right]$ diminue donc plus Π augmente. Ceci est normal car $\frac{\theta_0}{\theta_1}$ représente l'écart entre θ_0 et θ_1. Plus celui-ci augmente, meilleur est le test

1 pt

Ex3

1) Le test de Kolmogorov est défini par

Rejet de H_0 si $T_n = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n(y) - F(y)| > k_\alpha$

1pt où $F_n(y)$ est la fonction de répartition empirique de $(y_1, \dots, y_n)$ et $F(y)$ est la fonction de répartition théorique de la loi testée (ici celle du χ^2_2)

2) Nous avons vu en cours que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n(y) - F(y)| = \sup_{i=1,\dots,n} \Big\{ \underbrace{\max\Big\{\big|F(y_i) - \tfrac{i-1}{n}\big|, \big|F(y_i) - \tfrac{i}{n}\big|\Big\}}_{E_i} \Big\}$$

on obtient en observant $\frac{1}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$

$$E_1 = \max\{|F(y_1) - 0|, |F(y_1) - 0.2|\} = \max\{0.42, 0.22\} = 0.42$$

$$E_2 = \max\{|F(y_2) - \tfrac{1}{n}|, |F(y_2) - \tfrac{2}{n}|\} = \max\{0.48, 0.28\} = 0.48$$

1pt

$$E_3 = \max\{0.53, 0.33\} = 0.53$$

$$E_4 = \max\{0.38, 0.18\} = 0.18$$

$$E_5 = \max\{0.19, 0.01\} = 0.19$$

1pt

$$\boxed{T_n = \sup_{i=1,\dots,5} E_i = 0.53}$$

3)

3) on a $\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = P[T_n > S_\alpha \mid H_0 \text{ vraie}]$ (6)

donc plus α est grand plus on rejette H_0 et plus le seuil S_α est faible d'où $S_{0.05}\ (=0.294) < S_{0.01}\ (=0.352)$

1pt

4) On ne peut calculer la puissance du test de Kolmogorov car la loi de T_n sous H_1 est inconnue.

1pt