Ex1

1) $L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \theta^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

donc $\ln L(\ \ ) = 2n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i + cste$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} \geq 0 \iff \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0 \iff \boxed{\theta \leq \frac{2n}{\sum x_i}}$$

Tableau de variations

θ	0		$\frac{2n}{\sum x_i}$		$+\infty$
$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}$		$+$	0	$-$	
$\ln L$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\theta = \frac{2n}{\sum x_i}$ est donc le maximum global unique de la vraisemblance, donc

$$\boxed{\hat\theta_{MV} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

(2pts)

2) On remarque que X_i suit une loi gamma $\Gamma(\theta, 2)$ donc

$$\phi_{X_i}(u) = E\left(e^{jX_i u}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{it}{\theta}\right)^2}$$

La fonction caractéristique de U est donc

$$\phi_U(u) = \prod_{i=1}^{n}\phi_{X_i}(u) = \frac{1}{\left(1-\frac{it}{\theta}\right)^{2n}}$$

proportionnel à

(1pt) donc $\boxed{U \sim \Gamma(\theta, 2n)}$ de densité $p(u) \propto e^{-\theta u}\, u^{2n-1}$

En faisant un changement de variables, on a la loi de T.

$T = \frac{1}{U} \iff U = \frac{1}{T}$ donc changement de variables bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$

Jacobien $\frac{dU}{dT} = -\frac{1}{T^2} \Rightarrow \left|\frac{dU}{dT}\right| = \frac{1}{T^2}$

Loi de ~~θ~~ T

$$\pi(t) \propto e^{-\frac{\theta}{t}}\left(\frac{1}{t}\right)^{2n-1}\times\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^{2n+1}}\, e^{-\theta/t}$$

D'après les tables $\boxed{T \sim IG(\theta, 2n)}$

(1pt)

D'après ce qui précède, on a $\hat{\theta}_{MV} = 2nT$

donc $E[\hat{\theta}_{MV}] = 2n\,E[T] \underset{\text{Tables}}{=} 2n \dfrac{\theta}{2n-1}$

1pt $\boxed{\tilde{\theta}_{MV} = \dfrac{2n-1}{2n}\hat{\theta}_{MV} = \dfrac{2n-1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \text{ est donc un estimateur non biaisé de } \theta}$

Variance de $\tilde{\theta}_{MV}$

$$Var[\tilde{\theta}_{MV}] = Var[(2n-1)T] = (2n-1)^2 Var\,T$$
$$\underset{\text{Tables}}{=} (2n-1)^2 \frac{\theta^2}{(2n-1)^2(2n-2)}$$

d'où $\boxed{Var[\tilde{\theta}_{MV}] = \dfrac{\theta^2}{\cancel{(2n-1)}(2n-2)}}$ 1pt

Rq $\tilde{\theta}_{MV}$ non biaisé et $Var(\tilde{\theta}_{MV}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $\tilde{\theta}_{MV}$ convergent (on le savait)

3) La borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé de θ est définie par

$$BCR(\theta) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L(x_1,\dots,x_n;\theta)}{\partial\theta^2}\right]}$$

On a déjà calculé $\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \dfrac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$

donc $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} = \dfrac{-2n}{\theta^2}$

1pt d'où $\boxed{BCR(\theta) = \dfrac{\theta^2}{2n}}$

l'estimateur $\tilde{\theta}_{MV}$ a une variance supérieure à $BCR(\theta)$ donc ce n'est pas l'estimateur efficace de θ.

4) La loi a posteriori de $\theta \mid x_1 \dots x_n$ est définie par

$$p(\theta \mid x_1,\dots,x_n) \propto \underbrace{p(x_1,\dots,x_n \mid \theta)}_{\propto\, \theta^{2n} \exp(-\theta \sum x_i)} \underbrace{p(\theta)}_{\propto\, e^{-a\theta}\theta^{b-1}}$$

(3)

Donc $p(\theta | x_1, \dots, x_n) \propto \theta^{2n+b-1} \exp\left(-\theta\left(a + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right)$

$\boxed{\text{On reconnait une loi } \Gamma\left(a + \sum_{i=1}^{n} x_i, \ 2n+b\right)}$

1pt

$\ln p(\theta | x_1 \dots x_n) = (2n+b-1)\ln\theta - \theta\left(a + \sum x_i\right) + K$

$\frac{\partial \ln p}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{2n+b-1}{\theta} - \left(a + \sum x_i\right) = 0$

d'où $\boxed{\theta = \frac{2n+b-1}{a + \sum x_i}}$

qui est le maximum global unique de la loi a posteriori (d'après le travail fait à la question 1) en remplaçant $2n$ par $2n+b-1$ et $\sum x_i$ par $a + \sum x_i$. Donc

$$\boxed{\hat{\theta}_{MAP} = \frac{2n+b-1}{a + \sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

1pt

On remarque que $\hat{\theta}_{MAP} = \dfrac{1 + \frac{b-1}{2n}}{\frac{1}{\hat{\theta}_{MV}} + \frac{a}{2n}} \underset{n \to \infty}{\simeq} \hat{\theta}_{MV}$

donc $\boxed{\hat{\theta}_{MAP} \text{ se comporte comme } \hat{\theta}_{MV} \text{ quand } n \to +\infty}$

1pt

Ex2

1) D'après le théorème de Neyman Pearson

Rejet de H_0 si $\underbrace{\dfrac{L(x_1 \dots x_n ; \theta_1)}{L(x_1, \dots, x_n ; \theta_0)}}_{\dfrac{\theta_1^{2n} \exp(-\theta_1 \Sigma x_i)}{\theta_0^{2n} \exp(-\theta_0 \Sigma x_i)}} > K\alpha$

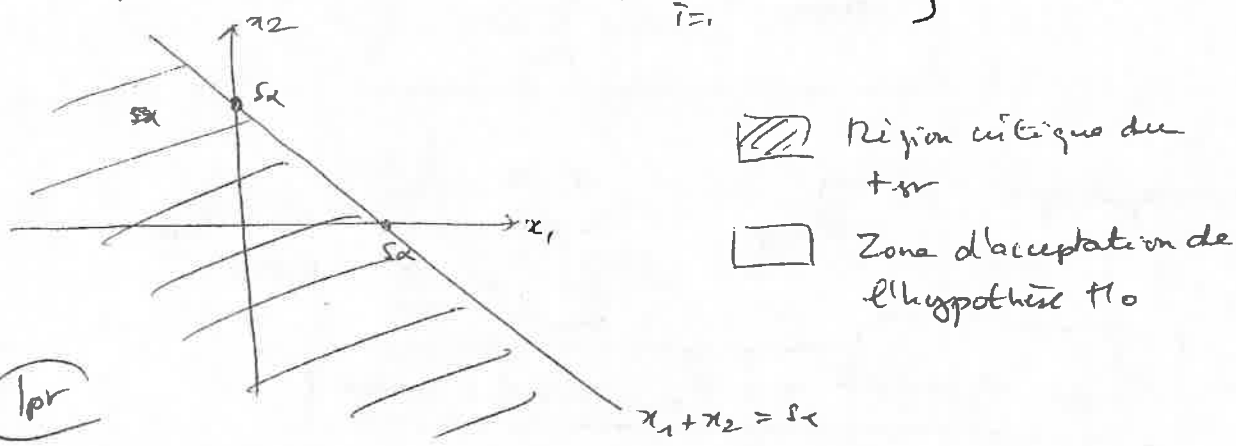
c'est-à-dire, rejet de H_0 si $(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^{n} x_i > K'_\alpha$

Comme $\theta_1 > \theta_0$, on a $\theta_0 - \theta_1 < 0$ donc le test devient

$$\boxed{\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} X_i < S\alpha}$$

1pt

3) La statistique de test est donc $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et la région critique du test $\left\{ x = (x_1 \dots x_n) \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i < S\alpha \right\}$



1pt

2) $\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = P[T_n < S\alpha \mid \theta = \theta_0]$

$= P[\theta_0 T_n < \theta_0 S_n \mid \theta_0 T_n \sim \Gamma(1, 2n)]$

donc $\boxed{\alpha = F_{2n}(\theta_0 S_n)}$ 0,5 pt

De même $\beta = P[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}] = P[T_n \geq S\alpha \mid \theta = \theta_1]$

$= 1 - P[\theta_1 T_n < \theta_1 S_n \mid \theta = \theta_1]$

1pt

d'où $\boxed{\beta = 1 - F_{2n}(\theta_1 S_n)}$ 0,5 pt

5

3) Les courbes COR expriment $\Pi = 1-\beta$ en fonction de α.

On a $\alpha = F_{2n}(\theta_0 S_n) \Rightarrow S_n = \frac{1}{\theta_0} F_{2n}^{-1}(\alpha)$

Donc

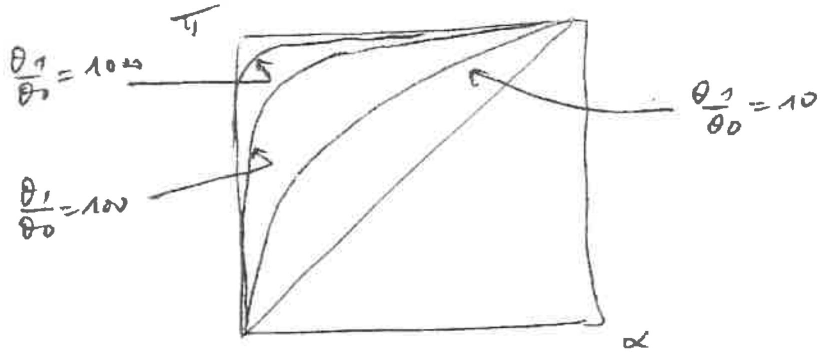
$$\Pi = 1-\beta = F_{2n}(\theta_1 S_n) = F_{2n}\left[\frac{\theta_1}{\theta_0} F_{2n}^{-1}(\alpha)\right]$$

Les courbes COR sont donc définis par

(1pt)

$$\boxed{\Pi = F_{2n}\left[\frac{\theta_1}{\theta_0} F_{2n}^{-1}(\alpha)\right]}$$

et elles ne dépendent que de $\frac{\theta_1}{\theta_0}$. F_{2n} est une fonction croissante car c'est une fonction de répartition. Donc plus $\frac{\theta_1}{\theta_0}$ est grand, meilleure est la performance du test.



(1pt)

Ex3 1) Pour centrer les variables $x_i^{1/3}$, il suffit de leur retrancher leur moyenne $\mu = (ab)^{1/3}$. Pour les réduire, il faut diviser $x_i^{1/3} - \mu$ par l'écart type de $x_i^{1/3}$ qui est $\sigma = \sqrt{\frac{b}{9\mu}}$.

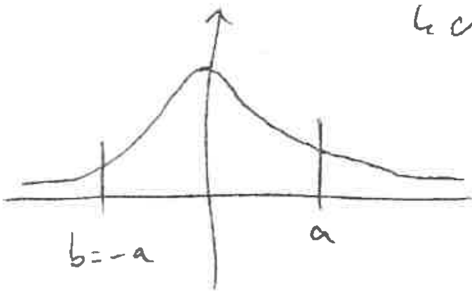
Finalement, on obtient

$$\boxed{y_i = \frac{x_i^{1/3} - (ab)^{1/3}}{\sqrt{\frac{b}{9\mu}}}}$$

Rq : si on ne connaissait pas μ et σ, on pourrait centrer et réduire $x_i^{1/3}$ par $y_i = \frac{x_i^{1/3} - \overline{x^{1/3}}}{S^{1/3}}$ avec $\overline{x^{1/3}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{1/3}$

et $S^{1/3} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{1/3} - \overline{x^{1/3}}\right)^2}$

2) Il faut découper $\mathbb{R}$ en 4 classes équiprobables. En tenant compte de la symétrie de la loi normale (voir dessin), les 4 classes sont de la forme $]-\infty, -a[$, $]-a, 0[$, $]0, a[$ et $]a, +\infty[$



La valeur de a se détermine à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$. En effet la probabilité d'appartenir à l'intervalle $]-\infty, a[$ doit être égale à 0.75

d'où $$0.75 = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = F(a)$$

(1pt)

d'où $$\boxed{a = F^{-1}(0.75)}$$

3) Le test du χ^2 est défini par

Rejet de H_0 si $$\phi = \sum_{k=1}^{K} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} > s_\alpha$$

avec $p_k = \frac{1}{4}$ $\forall k = 1, \dots, K$ et où n_k est le nombre de x_i appartenant à la classe C_k

(1pt)

4) On a $\alpha = P[\text{Rejet } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = P[\phi > s_\alpha \mid \phi \sim \chi^2_{K-1}]$

donc $\alpha = 1 - F_{K-1}(s_\alpha) \Rightarrow \boxed{s_\alpha = F_{K-1}^{-1}(1-\alpha)}$

(1pt)

où F^{-1}_{k-1} est l'inverse de la fonction de répartition d'une loi du χ^2 à $k-1$ degrés de liberté.

5) la puissance du test s'écrit

$$\pi = 1-\beta = 1 - P[\text{ Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}]$$

$$= 1 - P[\ \phi \leq s_\alpha \mid \text{les variables } Y_i \text{ ne suivent pas la loi } N(0,1)\ ]$$

1pt

<u>La loi de ϕ est inconnue sous H_1 donc on ne peut pas calculer π</u>