
EXAMEN STATISTIQUE - 1SN

Lundi 16 janvier Novembre 2023 (8h-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Estimation (10 points)

On considère n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n suivant la même loi de Poisson de paramètre λ et m variables aléatoires Y_1, \dots, Y_m suivant la même loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$, où $\lambda > 0$ est un paramètre inconnu et σ^2 est un paramètre connu. On supposera de plus que les vecteurs $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)^T$ et $\mathbf{Y}_m = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ sont indépendants. Une situation pratique dans laquelle on peut avoir ces deux ensembles d'observations $(X_1, \dots, X_n)^T$ et $(Y_1, \dots, Y_m)^T$ correspond par exemple au cas où X_1, \dots, X_n sont obtenues par un premier capteur qui discrétise les observations de manière à avoir une loi de Poisson et où $(Y_1, \dots, Y_m)^T$ sont obtenues par un second capteur fournissant des données de loi normale avec une incertitude σ^2 . L'objectif de cet exercice est d'étudier des estimateurs de λ basés sur les vecteurs \mathbf{X}_n et \mathbf{Y}_m et de déterminer s'il est avantageux de considérer ces deux vecteurs par rapport à utiliser un seul ensemble d'observations \mathbf{X}_{n+m} ou \mathbf{Y}_{n+m} .

1. (3pts) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre μ construit à partir de \mathbf{X}_n noté $\hat{\lambda}_{MV}$ et montrer qu'il est sans biais et efficace.

La vraisemblance de \mathbf{X}_n s'écrit

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_n; \lambda) &= \prod_{i=1}^n p(x_i; \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right] \\ &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda} \end{aligned}$$

Comme d'habitude, il est plus facile de maximiser la log-vraisemblance qui s'écrit

$$\log p(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln \lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!)$$

La première dérivée de la log-vraisemblance s'écrit

$$\frac{\partial \ln p(x_1, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n.$$

Donc

$$\frac{\partial \ln p(x_1, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

On en déduit que la vraisemblance admet un unique maximum global

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

d'où

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Cet estimateur est sans biais car

$$E[\hat{\lambda}_{MV}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \lambda.$$

La borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de λ est

$$\text{BCR}(\lambda) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln p(X_1, \dots, X_n; \lambda)}{\partial \lambda^2}\right]} = \frac{-1}{E\left[-\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\lambda^2}\right]} = \frac{\lambda}{n}.$$

La variance de l'estimateur $\hat{\lambda}_{MV}$ est

$$\text{var}[\hat{\lambda}_{MV}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] = \frac{\lambda}{n}.$$

Comme l'estimateur $\hat{\lambda}_{MV}$ est sans biais et de variance égale à sa borne de Cramér-Rao, $\hat{\lambda}_{MV}$ est l'estimateur efficace de λ .

2. (5pts) Pour profiter des deux ensembles d'observations \mathbf{X}_n et \mathbf{Y}_m , on propose d'utiliser l'estimateur

$$\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha) = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1-\alpha}{m} \sum_{j=1}^m Y_j, \quad \alpha \in]0, 1[.$$

- (2pts) Montrer que $\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)$ est un estimateur sans biais du paramètre λ pour toute valeur de α . Déterminer la variance de l'estimateur $\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)$.

L'estimateur $\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)$ est sans biais car

$$E[\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)] = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] + \frac{1-\alpha}{m} \sum_{j=1}^m E[Y_j] = \alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda = \lambda.$$

La variance de cet estimateur est (en utilisant l'indépendance entre les deux échantillons)

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)] &= \text{var}\left[\frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] + \text{var}\left[\frac{1-\alpha}{m} \sum_{j=1}^m Y_j\right] \\ &= \frac{\alpha^2}{n} \lambda + \frac{(1-\alpha)^2}{m} \sigma^2. \end{aligned}$$

- (1pt) Déterminer la valeur de α optimale noté α^* permettant de minimiser la variance de l'estimateur $\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)$.

La valeur de α minimisant la variance de l'estimateur $\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)$ vérifie

$$\frac{\partial \text{var}[\hat{\lambda}_{n,m}(\alpha)]}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{n} \lambda + \frac{-2(1-\alpha)}{m} \sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha \left[\frac{2}{n} \lambda + \frac{2}{m} \sigma^2 \right] = \frac{2\sigma^2}{m}.$$

soit

$$\alpha^* = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2 + m\lambda}.$$

- (2pts) Montrer que la variance de $\hat{\lambda}_{MV}$ obtenue avec $n + m$ observations x_1, \dots, x_{n+m} est inférieure à celle de $\hat{\lambda}_{opt}$ pour $\lambda < \sigma^2$.

La variance de $\hat{\lambda}_{MV}$ obtenue avec $n + m$ observations x_1, \dots, x_{n+m} est inférieure à celle de $\hat{\lambda}_{opt}$ si

$$\frac{\lambda}{n+m} < \frac{\lambda}{n}(\alpha^*)^2 + \frac{\sigma^2}{m}(1-\alpha^*)^2 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{n+m} < \frac{\lambda}{n} \left(\frac{n\sigma^2}{n\sigma^2 + m\lambda} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{m} \left(\frac{m\lambda}{n\sigma^2 + m\lambda} \right)^2$$

soit

$$\frac{\lambda}{n+m} (n\sigma^2 + m\lambda)^2 < \sigma^2 \lambda (n\sigma^2 + m\lambda) \Leftrightarrow \lambda < \sigma^2.$$

Comment expliquer ce résultat ?

Lorsque la variance des Y_j est supérieure à celle des X_i , c'est-à-dire, $\sigma^2 > \lambda$, il vaut mieux utiliser $n + m$ observations x_1, \dots, x_{n+m} que n observations x_1, \dots, x_n et m observations y_1, \dots, y_m . En effet les observations x_{n+1}, \dots, x_{n+m} sont alors plus proches de λ que les observations y_1, \dots, y_m .

3. (2pts) On définit la vraisemblance conjointe des échantillons \mathbf{x}_n et \mathbf{y}_m , notée $L(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m; \lambda)$, par le produit des vraisemblances des deux échantillons $(X_1, \dots, X_n)^T$ et $(Y_1, \dots, Y_m)^T$. Montrer que les extrémums de $L(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m; \lambda)$ par rapport à λ sont solution d'une équation du second degré que l'on précisera. Expliquer pourquoi cette équation admet une unique racine positive qu'on ne demande pas de déterminer.

La vraisemblance conjointe des échantillons \mathbf{x}_n et \mathbf{y}_m s'écrit

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m; \lambda) &= L(\mathbf{x}_n; \lambda)L(\mathbf{y}_m; \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right] \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(y_j - \lambda)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &\propto \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \exp(-n\lambda) \times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \lambda)^2 \right] \end{aligned}$$

La log-vraisemblance conjointe est donc (à une constante additive près)

$$\ln L(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m; \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(\lambda) - n\lambda - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \lambda)^2.$$

Les extrema de cette fonction vérifient

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m; \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \lambda) = 0,$$

c'est-à-dire qu'ils sont solution de l'équation

$$-\frac{m}{\sigma^2} \lambda^2 + \lambda \left(-n + \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{\sigma^2} \right) + \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Comme le rapport du terme constant ($\sum_{i=1}^n x_i$) et du terme en λ^2 ($-\frac{m}{\sigma^2}$) est négatif et qu'il représente le produit des racines, cette équation du second degré a une racine positive et une racine négative. Par ailleurs la log-vraisemblance tend vers $-\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$ et $\lambda \rightarrow +\infty$, donc elle admet un unique maximum global unique sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 2 : Tests Statistiques (10 points)

On considère n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes de densités

$$p(x_i; \theta) = \frac{3}{\theta} x_i^2 \exp\left(-\frac{x_i^3}{\theta}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

avec $\theta > 0$ et où $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ indique la fonction indicatrice sur \mathbb{R}^+ . On veut à l'aide d'observations x_1, \dots, x_n , de ces variables aléatoires tester les deux hypothèses suivantes

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1 \quad \text{avec } \theta_1 < \theta_0$$

1. (2pts) À l'aide du théorème de Neyman-Pearson, calculer la statistique T_n du test le plus puissant et indiquer la région critique de ce test. On retiendra pour T_n la fonction seule des observations. Le test de Neyman Pearson est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{p(x_1, \dots, x_n; \theta_1)}{p(x_1, \dots, x_n; \theta_0)} > S_{1,\alpha}$$

où S_α est un seuil dépendant du risque de première espèce α . Mais

$$\frac{p(x_1, \dots, x_n; \theta_1)}{p(x_1, \dots, x_n; \theta_0)} > S_{1,\alpha} \Leftrightarrow \frac{\exp\left[-\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^n x_i^3\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i^3\right]} > S_{2,\alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2\theta_0} - \frac{1}{2\theta_1}\right) \sum_{i=1}^n x_i^3 > S_{3,\alpha}$$

En utilisant la condition $\theta_1 < \theta_0$, on obtient

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i^3 < K_\alpha.$$

La région critique du test est l'ensemble des vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i^3 < K_\alpha$ et la statistique de test est

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i^3.$$

2. (2pts) Vérifier que la loi de $Y_i = \frac{2}{\theta} X_i^3$ est une loi du chi-deux à 2 degrés de liberté. Montrer que si Z et T sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois du chi-deux à n_1 et n_2 degrés de liberté, c'est-à-dire, $Z \sim \chi_{n_1}^2$ et $T \sim \chi_{n_2}^2$, alors on a $Z + T \sim \chi_{n_1+n_2}^2$. En déduire la loi de $\frac{2}{\theta} T_n$.

Le changement de variables $Y_i = \frac{2}{\theta} X_i^3$ est bijectif de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ . La densité de Y_i s'obtient avec la formule du changement de variables

$$\begin{aligned} \pi(y_i) &= \frac{3}{\theta} \left(\frac{\theta y_i}{2}\right)^{2/3} \exp\left(-\frac{y_i}{2}\right) \left|\frac{dx_i}{dy_i}\right| \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y_i) \\ &= \frac{3}{\theta} \left(\frac{\theta y_i}{2}\right)^{2/3} \exp\left(-\frac{y_i}{2}\right) \frac{\theta}{6} \left(\frac{\theta y_i}{2}\right)^{-2/3} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y_i) \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{y_i}{2}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y_i) \end{aligned}$$

qui est la densité d'une loi du chi-deux à 2 degrés de liberté. Si $Z \sim \chi_{n_1}^2$ et $T \sim \chi_{n_2}^2$, la fonction caractéristique de $Z + T$ est

$$E\left[e^{i(Z+T)u}\right] = E\left[e^{iZu}\right] E\left[e^{iT u}\right] = \left(\frac{1}{1-2iu}\right)^{n_1} \times \left(\frac{1}{1-2iu}\right)^{n_2} = \left(\frac{1}{1-2iu}\right)^{n_1+n_2}$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi $\chi_{n_1+n_2}^2$. Comme $\frac{2}{\theta} T_n = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i^3 = \sum_{i=1}^n Y_i$ et que $Y_i \sim \chi_2^2$, on en déduit $\frac{2}{\theta} T_n \sim \chi_{2n}^2$.

3. (1pt) En utilisant les résultats de la question précédente, exprimer le seuil du test de Neyman-Pearson en fonction du risque de première espèce α et de l'inverse de la fonction de répartition d'une loi du chi-deux dont on prendra soin de déterminer le nombre de degrés de liberté. On notera F_ν la fonction de répartition d'une loi du chi-deux à ν degrés de liberté et F_ν^{-1} son inverse.

Le risque α est défini par

$$\begin{aligned}\alpha &= P[\text{Rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] \\ &= P[T_n < K_\alpha | \theta = \theta_0] \\ &= P\left[\frac{2}{\theta} T_n < \frac{2}{\theta} K_\alpha | \theta = \theta_0\right] \\ &= F_{2n}\left(\frac{2}{\theta_0} K_\alpha\right)\end{aligned}$$

d'où

$$K_\alpha = \frac{\theta_0}{2} F_{2n}^{-1}(\alpha).$$

4. (1pt) Déterminer la puissance du test en fonction du seuil du test de Neyman-Pearson, de θ_1 et de F_ν , où ν est le nombre de degrés de liberté trouvé à la question précédente.

La puissance du test est définie par

$$\begin{aligned}\pi &= P[\text{Rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie}] \\ &= P[T_n < K_\alpha | \theta = \theta_1] \\ &= P\left[\frac{2}{\theta} T_n < \frac{2}{\theta} K_\alpha | \theta = \theta_1\right] \\ &= F_{2n}\left(\frac{2}{\theta_1} K_\alpha\right).\end{aligned}$$

5. (2pts) Déterminer les courbes COR associées à ce test et analyser leur comportement en fonction de θ_0 et θ_1 .

D'après ce qui précède, les courbes COR sont définie par

$$\pi = F_{2n}\left(\frac{2}{\theta_1} \times \frac{\theta_0}{2} F_{2n}^{-1}(\alpha)\right) = F_{2n}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1} F_{2n}^{-1}(\alpha)\right).$$

Comme F_{2n} est une fonction de répartition, elle est croissante et donc π est une fonction croissante de $\frac{\theta_0}{\theta_1}$. Donc plus θ_1 est petit, plus $\frac{\theta_0}{\theta_1}$ est grand et donc plus la puissance du test est grande. Ce résultat est logique.

6. (2pt) On désire vérifier que les observations x_1, \dots, x_n suivent la loi de densité $p(x_i; \theta)$ avec $\theta = 1$ à l'aide d'un test d'un Kolmogorov. Rappeler l'expression de la statistique de ce test (en fonction des valeurs de la fonction de répartition de la loi de densité $p(x; \theta = 1)$ aux points $x_{(i)}$ notées $F_\theta(x_{(i)})$, où $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ est la statistique d'ordre de l'échantillon (x_1, \dots, x_n)). Quelle est la région critique de ce test ? Qu'appelle-t-on statistique d'ordre de de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) ? Comment calculer la valeur du seuil à partir de l'inverse de la fonction de répartition de la loi de Kolmogorov ?

Le test de Kolmogorov rejette l'hypothèse H_0 si

$$D_n = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \max\{E_i^+, E_i^-\} > S_\alpha,$$

avec

$$E_i^+ = \left| \frac{i}{n} - F_1(x_{(i)}) \right|, \quad E_i^- = \left| \frac{i-1}{n} - F_1(x_{(i)}) \right|$$

La statistique du test est D_n . Sa région critique est $\{(x_1, \dots, x_n) | D_n > S_\alpha\}$. La statistique d'ordre de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) est obtenue en rangeant les données x_i par ordre croissant de manière à avoir $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$. La valeur du risque α du test est définie par

$$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P[D_n > S_\alpha | D_n \text{ suit la loi de Kolmogorov}] = 1 - F(S_\alpha)$$

où F est la fonction de répartition de la loi de Kolmogorov, d'où

$$S_\alpha = F^{-1}(1 - \alpha).$$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne σ^2 : variance F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{(1 - i\frac{t}{\theta})^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{- x }, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\mathbf{m}, \Sigma)$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1} (x-m)}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	\mathbf{m}	Σ	$e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}}$
Khi2 χ_ν^2 $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}$ $\nu \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi \lambda \left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda t }$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0, b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne σ^2 : variance **F. C.** : fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}(1 - e^{itn})}{n(1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	npq	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n \frac{q}{p}$	$n \frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1]$ $q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n$ $\sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1]$ $q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$