EXAMEN STATISTIQUE 1SN

Lundi 3 avril 2023

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Estimation (10 points)

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur $(X_1, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes de mêmes lois de densités

$$f_r(x_i; \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \frac{1}{x_i^{r+1}} \exp\left(-\frac{\lambda}{x_i}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x_i),$$

où $I_{\mathbb{R}^+}$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$ ($I_{\mathbb{R}^+}(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 sinon) et où r est un paramètre supposé connu. La moyenne et la variance d'une telle loi appelée loi inverse-gamma et notée $\mathcal{IG}(r, \lambda)$ sont

$$E[X_i] = \frac{\lambda}{r-1} \text{ et } \mathrm{var}[X_i] = \frac{\lambda^2}{(r-1)^2(r-2)}.$$

On admettra que si $X_i \sim \mathcal{IG}(r, \lambda)$, alors $Y_i = \frac{1}{X_i} \sim \mathcal{G}(r, \lambda)$ et qu'inversement si $Y_i \sim \mathcal{G}(r, \lambda)$, alors $X_i = \frac{1}{Y_i} \sim \mathcal{IG}(r, \lambda)$.

1. (2pts) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ est
$$\widehat{\lambda}_{\text{MV}} = \frac{nr}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{X_k}}.$$
On justifiera que la vraisemblance admet un maximum en ce point.
La vraisemblance de l'échantillon s'écrit
$$L(x_1, ..., x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f_r(x_i; \lambda) \propto \lambda^{rn} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{\lambda}{x_i}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x_i),$$
où $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. On sait qu'il est plus facile de travailler avec la log-vraisemblance définie par
$$\ln L(x_1, ..., x_n; \lambda) = (rn) \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$
Cette log-vraisemblance admet pour dérivée
$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{rn}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$
Les variations de cette dérivée sont définies par
$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \lambda)}{\partial \lambda} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{rn}{\lambda} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}. \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \leq \frac{rn}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}. \end{aligned}$$
Ceci permet de faire un tableau de variation qui indique que $\lambda = \frac{rn}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ est le maximum global unique de la vraisemblance, d'où
$$\widehat{\lambda}_{\text{MV}} = \frac{rn}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}.$$

2. (2pt) En utilisant les propriétés des lois gamma et inverse gamma données en début d'énoncé, déterminer la loi de $Y_k = \frac{1}{X_k}$. Montrer que $Y = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k}$ suit une loi gamma dont on précisera les paramètres. En déduire la loi de $\frac{1}{Y}$.
Comme $X_k \sim \mathcal{IG}(r, \lambda)$, alors $Y_k = \frac{1}{X_k} \sim \mathcal{G}(r, \lambda)$. D'après les tables de lois, la fonction caractéristique de Y_k est

$$\phi_{Y_k}(t) = E[e^{iY_k t}] = \frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^r}.$$

Donc la fonction caractéristique de Y est (en utilisant l'indépendance des variables Y_k)

$$\phi_Y(t) = E[e^{iYt}] = \prod_{k=1}^{n} E[e^{iY_k t}] = \frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^{rn}}.$$

On en déduit $Y \sim \mathcal{G}(nr, \lambda)$ et donc $\frac{1}{Y} \sim \mathcal{IG}(nr, \lambda)$

3. (2pts) Calculer l'espérance de $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$. En déduire un estimateur non biaisé de λ noté $\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}$. L'estimateur $\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}$ est-il convergent?

Comme $\widehat{\lambda}_{\text{MV}} = \frac{nr}{Y}$, en utilisant les tables de lois, on obtient

$$E\left[\widehat{\lambda}_{\text{MV}}\right] = nrE\left[\frac{1}{Y}\right] = \frac{nr}{nr-1}\lambda.$$

$\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ est donc un estimateur asymptotiquement non biaisé de λ. On peut construire un estimateur non biaisé en multipliant $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ par $\frac{nr-1}{nr}$. On obtient alors

$$\widetilde{\lambda}_{\text{MV}} = \frac{nr-1}{nr}\widehat{\lambda}_{\text{MV}} = \frac{nr-1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}.$$

D'après la table de lois, la variance de $\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}$ s'écrit

$$\text{var}\left[\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}\right] = (nr-1)^2 \text{var}\left[\frac{1}{Y}\right] = (nr-1)^2 \times \frac{\lambda^2}{(nr-1)^2(nr-2)} = \frac{\lambda^2}{nr-2}.$$

Comme $E\left[\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}\right] - \lambda = 0$ et que la variance de $\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, $\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre λ.

4. (2pts) Déterminer la borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de λ. L'estimateur $\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre λ ?
La dérivée seconde de la log-vraisemblance de $X_1, ..., X_n$ est

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, ..., x_n; \lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{-rn}{\lambda^2}.$$

d'où

$$E\left[-\frac{\partial^2 \ln L(X_1, ..., X_n; \lambda)}{\partial \lambda^2}\right] = \frac{rn}{\lambda^2}.$$

On en déduit que la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non-biaisé de λ est

$$\text{BCR} = \frac{1}{E\left[-\frac{\partial^2 \ln L(X_1,...,X_n;\lambda)}{\partial \lambda^2}\right]} = \frac{\lambda^2}{nr}.$$

Comme $\text{var}\left[\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}\right] = \frac{\lambda^2}{nr-2} > \frac{\lambda^2}{nr}$, $\widetilde{\lambda}_{\text{MV}}$ n'est pas l'estimateur efficace du paramètre λ. On notera que cet estimateur est asymptotiquement efficace.

5. (2pts) On suppose désormais que le paramètre λ est muni d'une loi a priori de densité

$$f(\lambda) = \begin{cases} e^{1-\lambda} & \text{si } \lambda > 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre a noté $\widehat{\lambda}_{\text{MAP}}$ et le comparer à $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ pour $n \to \infty$. Commenter ce résultat.

La loi a posteriori du paramètre λ vérifie

$$\begin{aligned} f_r(\lambda|x_1, ..., x_n) &\propto f_r(x_1, ..., x_n|\lambda) f(\lambda) \\ &\propto \lambda^{rn} \exp\left\{-\lambda\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right]\right\} \mathcal{I}_{]1,+\infty[}(\lambda), \end{aligned}$$

qui a la même forme que la log-vraisemblance si on remplace $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ par $1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$. L'estimateur du maximum a posteriori du paramètre λ s'obtient donc à partir de l'estimateur du maximum de vraisemblance en faisant cette même transformation, soit

$$\widehat{\lambda}_{\text{MAP}} = \frac{nr}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}.$$

Remarque : l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre λ s'écrit

$$\widehat{\lambda}_{\text{MAP}} = \frac{nr}{1 + \frac{nr}{\widehat{\lambda}_{\text{MV}}}}$$

On peut donc remarquer que $\widehat{\lambda}_{\text{MAP}}$ et $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ se comportent de manière similaire lorsque $n \to +\infty$. Lorsqu'on a beaucoup de données, on a tendance à oublier l'information a priori et à faire confiance à l'estimateur du maximum de vraisemblance qui résume l'information contenue dans les données.

Exercice 2 : Test Statistique (10 **points**)

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur $(X_1, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes de mêmes lois de densités

$$f_r(x_i; \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \frac{1}{x_i^{r+1}} \exp\left(-\frac{\lambda}{x_i}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x_i),$$

où $I_{\mathbb{R}^+}$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$ ($I_{\mathbb{R}^+}(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 sinon) et où r est un paramètre supposé connu. La moyenne et la variance d'une telle loi appelée loi inverse-gamma et notée $\mathcal{IG}(r, \lambda)$ sont

$$E[X_i] = \frac{\lambda}{r-1} \text{ et } \mathrm{var}[X_i] = \frac{\lambda^2}{(r-1)^2(r-2)}.$$

On désire utiliser les observations $x_1, ..., x_n$ pour déterminer si $\lambda = \lambda_0 > 0$ ou si $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$. On considère donc le test d'hypothèses

$$H_0 : \lambda = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \qquad \text{avec } \lambda_1 > \lambda_0.$$

1. (2pts) Déterminer la statistique T_n du test de Neyman Pearson et la région critique associée.
Le test de Neyman Pearson est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(x_1, ..., x_n; \lambda_1)}{L(x_1, ..., x_n; \lambda_0)} > S_{1,\alpha}$$

où $S_{1,\alpha}$ est un seuil dépendant du risque de première espèce α. Mais

$$\frac{L(x_1, ..., x_n; \lambda_1)}{L(x_1, ..., x_n; \lambda_0)} > S_{1,\alpha} \Leftrightarrow \ln \frac{L(x_1, ..., x_n; \lambda_1)}{L(x_1, ..., x_n; \lambda_0)} > S_{2,\alpha}$$
$$\Leftrightarrow nr \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) + (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} > S_{2,\alpha}.$$

Comme $\lambda_1 > \lambda_0$, on a $\lambda_0 - \lambda_1 < 0$, d'où la règle de décision

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} < S_\alpha.$$

La région critique du test est l'ensemble des vecteurs $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $T_n < S_\alpha$ et la statistique de test est $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$.

2. (1pt) En admettant que $Y_i = \frac{1}{X_i}$ suit une loi gamma de paramètres r et λ, i.e., $Y_i \sim \mathrm{G}(r, \lambda)$, déterminer la loi asymptotique de T_n sous les deux hypothèses H_0 et H_1.
La loi gamma $\mathcal{G}(r, \lambda)$ est de moyenne $\frac{r}{\lambda}$ et de variance $\frac{r}{\lambda^2}$. Donc

$$E[T_n] = \frac{nr}{\lambda} \text{ et } \mathrm{var}[T_n] = \frac{nr}{\lambda^2}.$$

Comme T_n peut s'écrire comme une somme de variables indépendantes, l'application du théorème central limite permet alors d'obtenir les résultats suivants

$$\text{Sous } H_0 : T_n \approx \mathcal{N}\left(\frac{nr}{\lambda_0}, \frac{nr}{\lambda_0^2}\right),$$

$$\text{Sous } H_1 : T_n \approx \mathcal{N}\left(\frac{nr}{\lambda_1}, \frac{nr}{\lambda_1^2}\right),$$

où $\approx$ signifie "de loi approchée (pour n grand)".

3. (2pts) On note G la fonction de répartition d'une loi du normale $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant la loi asymptotique trouvée à la question précédente, exprimer le risque de première espèce α en fonction du seuil du test de Neyman Pearson noté S_α, de $G(\alpha)$, n, r et λ_0. En déduire la valeur du seuil S_α en fonction de $G^{-1}(\alpha)$ et de n, r et λ_0.
Le risque α est défini par
$$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P\left[T_n < S_\alpha | T_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{nr}{\lambda_0}, \frac{nr}{\lambda_0^2}\right)\right],$$
soit
$$\alpha = G\left[\frac{S_\alpha - \frac{nr}{\lambda_0}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}}}\right].$$
Pour obtenir le seuil S_α, il suffit d'inverser cette relation :
$$S_\alpha = \sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}} G^{-1}(\alpha) + \frac{nr}{\lambda_0}.$$

4. (2pts) Déterminer les caractéristiques opérationnelles du récepteur (courbes COR) pour ce test et montrer qu'elles ne dépendent que de nr et de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. Analyser les performances du test en fonction de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ et tracer l'allure approximative des courbes COR pour différentes valeurs de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$.
Les courbes COR expriment $\pi = 1 - \beta$ en fonction de α. On a
$$\beta = P[\text{Rejeter } H_1 | H_1 \text{ vraie}] = P\left[T_n \geq S_\alpha | T_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{nr}{\lambda_1}, \frac{nr}{\lambda_1^2}\right)\right],$$
soit
$$\beta = 1 - G\left[\frac{S_\alpha - \frac{nr}{\lambda_1}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_1^2}}}\right].$$
On a donc
$$\pi = G\left[\frac{S_\alpha - \frac{nr}{\lambda_1}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_1^2}}}\right].$$
En remplaçant $S_\alpha = \sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}} G^{-1}(\alpha) + \frac{nr}{\lambda_0}$ dans cette expression, on a
$$\pi = G\left[G^{-1}(\alpha)\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \sqrt{nr}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1\right)\right].$$
On observe donc que π ne dépend que de nr et de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. De plus, comme G est une fonction croissante (c'est une fonction de répartition), π est une fonction croissante de nr. On en déduit que plus le nombre d'observations est grand, meilleure est la performance du test, ce qui est habituel. La puissance du test est aussi une fonction croissante de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, ce qui donne des courbes COR similaires à celles représentées dans la figure 1.

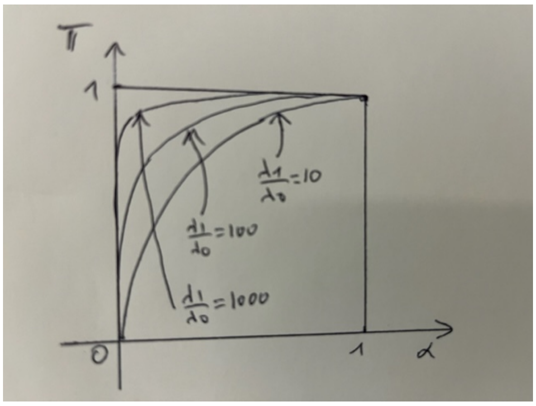

Figure 1: Allure des courbes COR pour différentes valeurs de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$.

5. (3pts) On désire vérifier que les observations x_i suivent la loi de densité $f_r(x_i;\lambda)$ avec $r=\lambda=1$ à l'aide d'un test de Kolmogorov.

- Déterminer la fonction de répartition de la loi de densité $f_r(x_i;\lambda)$ notée F lorsque $r=\lambda=1$.
- On observe l'échantillon de taille $n=4$ suivant : $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$ et $x_4=\frac{3}{2}$. Le tableau suivant résume les quantités nécessaire pour effectuer un test de Kolmogorov

$x_{(i)}$	1.5	2	3	4
$F\left(x_{(i)}\right)$	0.5134	0.6065	0.7165	0.7788
$\hat{F}\left(x_{(i)}^-\right)$	0	0.25	0.50	0.75
$\hat{F}\left(x_{(i)}^+\right)$	0.25	0.50	0.75	1
$E_i^- = \lvert F\left(x_{(i)}\right) - \hat{F}\left(x_{(i)}^-\right)\rvert$	0.5134	0.3565	0.2165	0.0288
$E_i^+ = \lvert F\left(x_{(i)}\right) - \hat{F}\left(x_{(i)}^+\right)\rvert$	0.2634	0.1065	0.0335	0.2212

où $\left(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)},x_{(4)}\right)$ est l'échantillon ordonné. Expliquer ce que représentent $\hat{F}\left(x_{(i)}^-\right)$ et $\hat{F}\left(x_{(i)}^+\right)$.

- Rappeler la région critique du test de Kolmogorov. Pour $\alpha=0.01$ et $n=4$, on a $S_{0.01}=0.7342$. Que peut-on en conclure ?

- La fonction de répartition associée à $f_r(x_i;\lambda)$ pour $r=\lambda=1$ s'écrit

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_1(u;1)du = \begin{cases} 0 \text{ si } x\leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{u^2}\exp\left(-\frac{1}{u}\right)du \text{ si } u>0 \end{cases}$$

En faisant le changement de variables $v=\frac{1}{u}$, on obtient

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\leq 0 \\ \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\exp\left(-v\right)dv \text{ si } v>0 \end{cases}$$

En faisant une intégration par parties, on obtient

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

- $\hat{F}\left(x_{(i)}^-\right)$ et $\hat{F}\left(x_{(i)}^+\right)$ représentent les valeurs à gauche et à droite de la fonction en escaliers $\hat{F}$ au point $x_{(i)}$.

- Le test de Kolmogorov rejette l'hypothèse H_0 si

$$D_n = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \max\{E_i^+, E_i^-\} > S_\alpha.$$

Dans notre cas $D_n = 0.5134 < S_{0.01} = 0.7342$ et donc on accepte l'hypothèse H_0 (les observations x_i suivent la loi de densité $f_r(x_i; \lambda)$ avec $r = \lambda = 1$) avec le risque $\alpha = 0.01$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \lambda)$	$f(x) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda x} x^{\nu-1}$ $\lambda > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\lambda}$	$\dfrac{\nu}{\lambda^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \lambda)$	$f(x) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\lambda}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\lambda > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\lambda}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\lambda^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\boldsymbol{\Sigma})}}$ $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_p)^T \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne $\quad \sigma^2$: variance $\quad$ **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X=k] \qquad p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$