EXAMEN STATISTIQUE - 1MF2E

Lundi 25 Mars 2024 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Estimation (10 points)

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur $(X_1, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative définie par

$$P[X_i = x_i; p] = \binom{k + x_i - 1}{k - 1} p^k q^{x_i}, \quad x_i \in \mathbb{N}$$

avec $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$, $k \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On fera attention car les notations sont légèrement différentes de celles des tables puisqu'ici n est le nombre d'observations et les paramètres de cette loi sont notés p et k. En tenant compte de ce changement de notation, cette loi est de moyenne $E[X_i] = k\frac{q}{p}$, de variance $\text{var}(X_i) = k\frac{q}{p^2}$ et de fonction caractéristique $\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^k$. On supposera dans cet exercice que k est un paramètre connu et que p est un paramètre inconnu que l'on cherche à estimer.

1. (2pts) Déterminer l'estimateur du vraisemblance du paramètre p noté $\widehat{p}_{\text{MV}}$. Comme cet estimateur semble difficile à étudier, on s'intéresse maintenant au paramètre $\theta = \frac{1-p}{p}$. Montrer (en utilisant par exemple l'invariance fonctionnelle) que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La vraisemblance de l'échantillon s'écrit

$$L(x_1, ..., x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i; p] \propto p^{nk} q^{\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

où $\propto$ signifie "proportionnel à" avec une constante multiplicative qui regroupe tous les termes indépendants de p. On sait qu'il est plus facile de travailler avec la log-vraisemblance définie par

$$\ln L(x_1, ..., x_n; p) = \text{Cste} + (nk) \ln p + \ln(1 - p) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right).$$

où la constante "Cste" est devenue additive. Cette log-vraisemblance admet pour dérivée

$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; p)}{\partial p} = \frac{nk}{p} - \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Les variations de cette dérivée sont définies par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; p)}{\partial p} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{nk}{p} \geq \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} x_i. \\
&\Leftrightarrow \quad (1-p)nk \geq p \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
&\Leftrightarrow \quad p \leq \frac{nk}{nk + \sum_{i=1}^{n} x_i},
\end{aligned}$$

où la seconde inégalité a été obtenue en multipliant les deux termes de l'inégalité par $p(1-p)$. Ceci permet de faire un tableau de variation qui indique que $p = \frac{nk}{nk+\sum_{i=1}^n x_i}$ est le maximum global unique de la vraisemblance, d'où

$$\widehat{p}_{\text{MV}} = \frac{nk}{nk + \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Puisque la relation $\theta = \frac{1-p}{p}$ est bijective, l'invariance fonctionnelle de l'estimateur du maximum de vraisemblance conduit à

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{1-\widehat{p}_{\text{MV}}}{\widehat{p}_{\text{MV}}} = \frac{1}{\widehat{p}_{\text{MV}}} - 1 = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^n X_i.$$

2. (2pt) Déterminer la moyenne et la variance de l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ en fonction de n, k et θ. L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il un estimateur sans biais et convergent du paramètre θ ?
La loi binomiale négative est de moyenne $k\theta$ et de variance $k\theta(1+\theta)$ car $p = \frac{1}{1+\theta}$ implique $\frac{q}{p} = \theta$ et $\frac{q}{p^2} = \theta(1+\theta)$. Donc
$$E[\widehat{\theta}_{\text{MV}}] = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \theta.$$
et de variance
$$\text{var}[\widehat{\theta}_{\text{MV}}] = \frac{1}{(nk)^2}\sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] = \frac{\theta(1+\theta)}{nk}.$$
Comme $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est un estimateur non biaisé et que sa variance tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est un estimateur convergent de θ.

3. (2pt) Déterminer la borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre θ. L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?
La vraisemblance de l'échantillon s'écrit en fonction de θ comme suit
$$L(x_1, ..., x_n; \theta) \propto \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{nk}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$
car $p = \frac{1}{1+\theta}$ et $q = 1 - p = \frac{\theta}{1+\theta}$. Son logarithme est donc
$$\ln L(x_1, ..., x_n; \theta) = \text{Cste} - nk\ln(1+\theta) + \sum_{i=1}^n x_i\left[\ln\theta - \ln(1+\theta)\right].$$
La dérivée première de cette vraisermblance est
$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial\theta} = \frac{-nk}{1+\theta} + \sum_{i=1}^n x_i\left[\frac{1}{\theta} - \frac{1}{1+\theta}\right].$$
La dérivée seconde de la log-vraisemblance par rapport à θ est donc
$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial\theta^2} = \frac{nk}{(1+\theta)^2} + \sum_{i=1}^n x_i\left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(1+\theta)^2}\right].$$
d'où
$$E\left[-\frac{\partial^2 \ln L(X_1, ..., X_n; a)}{\partial\theta^2}\right] = \frac{nk}{(1+\theta)^2} + nk\theta\left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(1+\theta)^2}\right].$$

En simplifiant cette expression (factorisation par nk et réduction au même dénominateur), on en déduit que la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non-biaisé de a est

$$\text{BCR} = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L(X_1,\ldots,X_n;\theta)}{\partial\theta^2}\right]} = \frac{\theta(1+\theta)}{nk}.$$

Comme $\text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] = \text{BCR}$ et que l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est non biaisé, l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est l'estimateur efficace du paramètre θ.

4. (1pt) Déterminer un estimateur des moments du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{Mo}}$.
Puisque $E[X_i] = k\theta$, on a $\theta = \frac{E[X_i]}{k}$, d'où

$$\widehat{\theta}_{\text{Mo}} = \widehat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

5. (3pts) On suppose désormais que le paramètre θ est muni d'une loi a priori de densité

$$f(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^2} I_{\mathbb{R}^+}(\theta).$$

où $I_{\mathbb{R}^+}$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$ ($I_{\mathbb{R}^+}(\theta) = 1$ si $\theta > 0$ et 0 sinon).

- Expliquer les connaissances sur θ apportées par la forme de $f(\theta)$.
La fonction f est une fonction décroissante de θ. L'information a priori sur θ aura donc tendance à favoriser les faibles valeurs de θ
- Déterminer l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$ et vérifier que $\widehat{\theta}_{\text{MAP}} < \widehat{\theta}_{\text{MV}}$. Est ce que ceci est cohérent avec l'expression de la densité a priori $f(\theta)$?
On a vu que la vraisemblance de l'échantillon s'écrit en fonction de θ comme suit

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta) \propto \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{nk}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

La loi a posteriori de $\theta|X_1,\ldots,X_n$ vérifie donc

$$p(\theta|x_1,\ldots,x_n) \propto p(x_1,\ldots,x_n|\theta)f(\theta) \propto \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{nk+2}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Cette loi est obtenue en remplaçant nk par $nk+2$ dans la vraisemblance. On en déduit

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{1}{nk+2}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Comme $nk+2 > nk$ et que les variables X_i sont à valeurs positives, on en déduit

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} < \widehat{\theta}_{\text{MV}}.$$

La loi a priori de θ favorise les faibles valeurs de θ. Donc l'estimateur MAP de θ est inférieur à son estimateur du maximum de vraisemblance (qui ne fait aucune hypothèse a priori sur θ).

Exercice 2 : Tests Statistiques (10 **points**)

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur $(X_1, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative définie par

$$P[X_i = x_i; p] = \binom{k + x_i - 1}{k - 1} p^k q^{x_i}, \quad x_i \in \mathbb{N}$$

avec $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$, $k \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On fera attention car les notations sont légèrement différentes de celles des tables puisqu'ici n est le nombre d'observations et les paramètres de cette loi sont notés p et k. En tenant compte de ce changement de notation, cette loi est de moyenne $E[X_i] = k\frac{q}{p}$, de variance $\text{var}(X_i) = k\frac{q}{p^2}$ et de fonction caractéristique $\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^k$. On supposera dans cet exercice que k est un paramètre connu et on désire utiliser les observations $x_1, ..., x_n$ pour déterminer si $p = p_0 > 0$ ou si $p = p_1 > p_0$. On considère donc le test d'hypothèses

$$H_0 : p = p_0, \quad H_1 : p = p_1 \qquad \text{avec } p_1 > p_0 > 0.$$

1. (2pt) Déterminer la statistique T_n du test de Neyman Pearson et la région critique associée.
   Le test de Neyman Pearson est défini par
   $$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(x_1, ..., x_n; p_1)}{L(x_1, ..., x_n; p_0)} > S_{1,\alpha}$$
   où $S_{1,\alpha}$ est un seuil dépendant du risque de première espèce α. Mais
   $$\begin{aligned} \frac{L(x_1, ..., x_n; p_1)}{L(x_1, ..., x_n; p_0)} > S_{1,\alpha} &\Leftrightarrow \ln \frac{L(x_1, ..., x_n; p_1)}{L(x_1, ..., x_n; p_0)} > S_{2,\alpha} \\ &\Leftrightarrow (\ln(q_1) - \ln(q_0)) \sum_{i=1}^{n} x_i > S_{3,\alpha}. \end{aligned}$$
   où on a utilisé le fait que la vraisemblance vérifie
   $$L(x_1, ..., x_n; p) \propto p^{nk} q^{\sum_{i=1}^n x_i},$$
   Comme $p_1 > p_0$, on a $q_1 = 1 - p_1 < q_0$ et $\ln(q_1) < \ln(q_0)$. La règle de décision est donc finalement
   $$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i < S_\alpha.$$
   La région critique du test est l'ensemble des vecteurs $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $T_n < S_\alpha$ et la statistique de test est $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2. (1pt) Exprimer la moyenne et la variance de T_n en fonction de k, n et $\theta = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}$. En déduire la loi approchée de T_n sous les deux hypothèses H_0 et H_1 provenant du théorème central limite (on exprimera les paramètres de cette loi en fonction de k, n et θ).
   La moyenne et la variance de X_i sont
   $$E[X_i] = k\frac{q}{p} = k\theta \text{ et } \text{var}[X_i] = k\frac{q}{p^2} = k\theta(1 + \theta),$$
   où on a utilisé le fait que $\theta = \frac{1-p}{p} \Leftrightarrow p = \frac{1}{1+\theta}$. D'après le théorème central limite, on a
   $$\frac{T_n - kn\theta}{\sqrt{kn\theta(1 + \theta)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$
   On en déduit
   $$\text{Sous } H_0 : T_n \approx \mathcal{N}\left(kn\theta_0, kn\theta_0(1 + \theta_0)\right),$$
   $$\text{Sous } H_1 : T_n \approx \mathcal{N}\left(kn\theta_1, kn\theta_1(1 + \theta_1)\right),$$
   où $\approx$ signifie "de loi approchée (pour n grand)".

3. (2pts) On note F la fonction de répartition d'une loi du normale $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant la loi approchée de T_n déterminée à la question précédente, exprimer le risque de première espèce α en fonction du seuil du test de Neyman Pearson noté S_α, de $F(\alpha)$, nk et θ_0. En déduire la valeur du seuil S_α en fonction de $F^{-1}(\alpha)$, nk et θ_0.
Le risque α est défini par

$$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P\left[T_n < S_\alpha | T_n \sim \mathcal{N}\left(kn\theta_0, kn\theta_0(1+\theta_0)\right)\right],$$

soit

$$\alpha = F\left[\frac{S_\alpha - kn\theta_0}{\sqrt{kn\theta_0(1+\theta_0)}}\right].$$

On en déduit

$$S_\alpha = F^{-1}(\alpha)\sqrt{nk\theta_0(1+\theta_0)} + nk\theta_0.$$

4. (2pts) En utilisant la loi approchée de T_n déterminée à la question 2), déterminer les caractéristiques opérationnelles du récepteur (courbes COR) pour ce test et montrer qu'elles ne dépendent que de $\sqrt{nk}$, $F^{-1}(\alpha)$ et de deux fonctions dépendant des paramètres θ_0 et θ_1. Analyser les performances du test en fonction de nk et tracer l'allure approximative des courbes COR pour différentes valeurs de ce paramètre.
Les courbes COR expriment $\pi = 1 - \beta$ en fonction de α. On sait qu'il suffit d'utiliser l'expression de α et de changer θ_0 en θ_1 pour avoir π, soit

$$\pi = F\left[\frac{S_\alpha - kn\theta_1}{\sqrt{kn\theta_1(1+\theta_1)}}\right],$$

soit en remplaçant S_α par son expression

$$\pi = F\left[\frac{F^{-1}(\alpha)\sqrt{nk\theta_0(1+\theta_0)} + nk\theta_0 - kn\theta_1}{\sqrt{kn\theta_1(1+\theta_1)}}\right].$$

On obtient donc

$$\pi = F\left[F^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\theta_0(1+\theta_0)}{\theta_1(1+\theta_1)}} + \sqrt{nk}\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sqrt{\theta_1(1+\theta_1)}}\right].$$

Le paramètre $\theta = \frac{1}{p-1}$ est une fonction décroissante de p. Donc si $p_1 > p_0$, on a $\theta_1 < \theta_0$ et $\theta_0 - \theta_1 > 0$. On en déduit que π est une fonction croissante de nk. En particulier, quand nk augmente, la performance du test augmente, ce qui est attendu. L'allure approximative de ces courbes pour différentes valeurs de nk est représentée ci-dessous :

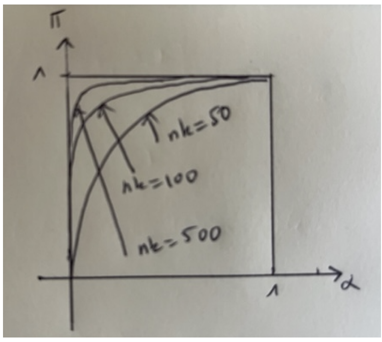

Figure 1: Allure des courbes COR pour différentes valeurs de nk.

5. (3pts) On désire vérifier que les observations suivent une loi binomiale négative à l'aide d'un test du χ^2. Le tableau suivant résume les quantités nécessaires pour effectuer le test

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_k	70	38	17	10	9	3	2	1
$n\pi_k$	69.49	37.60	20.10	10.70	5.69	3.02	1.60	0.85

où n_k est le nombre d'observations égales à k avec $k \in \{0, ..., 7\}$, $n = \sum_{k=0}^{7} n_k = 150$ et $\pi_k = P[X_i = k]$ a été calculée avec une loi binomiale négative dont les deux paramètres k et p ont été estimés avec la méthode du maximum de vraisemblance. Les trois dernières observations sont regroupées dans une même classe, de manière à obtenir 6 classes définies par $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, $C_3 = \{3\}$, $C_4 = \{4\}$ et $C_5 = \{5, 6, 7\}$.

- Expliquer pourquoi on a regroupé les valeurs $\{5\}$, $\{6\}$ et $\{7\}$ dans une même classe.
  Les classes doivent vérifier $n\pi_k \geq 5$, ce qui n'est pas le cas avec les 8 classes d'origine. Si on regroupe les valeurs $\{5\}$, $\{6\}$ et $\{7\}$ dans une même classe, la condition est vérifiée.
- Exprimer la statistique du test du χ^2 en fonction des données du problème pour les 6 classes définies ci-dessus (sans chercher à la calculer).
  La statistique du test du χ^2 est définie par
  $$\phi = \sum_{k=0}^{5} \frac{(n_k - n\pi_k)^2}{n\pi_k}.$$
- Rappeler la région critique du test du χ^2.
  On rejette l'hypothèse H_0 si $\phi > S_\alpha$, où S_α est un seuil dépendant de la probabilité de fausse alarme α (typiquement fixée à $\alpha = 0.01$ ou à $\alpha = 0.05$).
- Quelle loi doit être utilisée pour calculer le seuil de ce test noté S_α ?
  Comme on a estimé deux paramètres, la loi asymptotique de ϕ est une loi du χ^2_3. Le nombre de degrés de liberté est égal $K - 1 - n_p$ avec $K = 6$ (nombre de classes) et $n_p = 2$ (nombre de paramètres estimés).
- Donner l'expression de S_α en fonction de α et de l'inverse de la fonction de répartition de la loi trouvée à la question précédente.
  On a
  $$\alpha = P[\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P[\phi > S_\alpha | \phi \sim \chi^2_3] = 1 - F_3(S_\alpha),$$
  où F_3 est la fonction de répartition de la loi χ^2_3. On en conclut
  $$S_\alpha = F_3^{-1}(1 - \alpha).$$
- Si on augmente la valeur de α, la valeur de S_α augmente-t-elle ou diminue-t-elle ?
  Comme α est la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 sachant H_0 vraie, plus α est grand, plus on rejette H_0, donc plus le seuil est petit.

The Matlab code for this test is provided below

- Génération des valeurs observées : bins=0:7
- Comptes observés : obs=[70 38 17 10 9 3 2 1]
- Estimation des paramètre de la loi binomiale négative (nbin) : pd = fitdist(bins',‘nbin',‘Frequency',obs);
- Génération des probabilités π_k : pi=pdf(pd,bins)
- Compte théoriques $n\pi_k$: exp = n * pi
- Test du chi2 : [h, p, st]=chi2gof(bins,‘Ctrs',bins,‘Frequency',obs, ‘Expected',exp,‘Nparams, 2)
- Conclusions :
  * h=0 donc on accepte H_0 avec $\alpha = 0.05$
  * p = pvalue = 0.4726
  * statistique de test = 2.5147
  * nombre de degrés de liberté de la loi du chi2 : df=3
  * Comptes observés : O =[70 38 17 10 9 6]
  * Comptes théoriques : E = [69.4880 37.5999 20.1011 10.7026 5.6869 5.4667]

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k]$ $\qquad$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $x\in\,]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$	$f(x)=\frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-\theta x}x^{\nu-1}$ $\theta>0,\ \nu>0$ $x\geq 0$ avec $\Gamma(n+1)=n!\ \forall n\in\mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{\left(1-i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$	$f(x)=\frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\theta}{x}}\frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta>0,\ \nu>0$ $x\geq 0$ avec $\Gamma(n+1)=n!\ \forall n\in\mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu>1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu>2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert},\quad x\in\mathbb{R}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\Sigma})$	$f(x)=Ke^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p\det(\Sigma)}}$ $x\in\mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)$	$f(x)=ke^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k=\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu\in\mathbb{N}^*,\ x\geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x)=\frac{1}{\pi\lambda\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t-\lambda\lvert t\rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x)=kx^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a>0,\ b>0$ $x\in\,]0,1[$ avec $\Gamma(n+1)=n!\ \forall n\in\mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)