EXAMEN STATISTIQUE 1MF2E

Lundi 23 mars 2026

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Estimation (12 points)

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur de n variables aléatoires X_i indépendantes de lois de Rademacher de paramètre θ, c'est-à-dire, telles que

$$P[X_i = x_i; \theta] = \theta^{\frac{1+x_i}{2}}(1-\theta)^{\frac{1-x_i}{2}},\ x_i \in \{-1, 1\},$$

avec $\theta > 0$ un paramètre inconnu.

1. (2pts) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est :

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On effectue les traitements habituels

- Calcul de la vraisemblance.

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i; \theta] = \theta^{\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}(1-\theta)^{\frac{1}{2}\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

- Calcul de la log vraisemblance

$$\ln L(x_1, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(\theta) + \frac{1}{2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-\theta)$$

- Calcul de la dérivée de la log-vraisemblance et de l'estimateur

$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\frac{1}{1-\theta}$$

qui s'annule pour

$$(1-\theta)\left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \theta\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On en déduit que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est :

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

2. (2pts) Montrer que si X_i suit une loi de Rademacher, alors $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli. En déduire la moyenne et la variance de X_i notées $E[X_i]$ et $\text{var}[X_i]$ en fonction de θ.
Comme $x_i \in \{-1, 1\}$, la variable Y_i prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. De plus

$$P[Y_i] = 0 = P[X_i = -1] = 1 - \theta \text{ et } P[Y_i] = 1 = P[X_i = 1] = \theta$$

Donc Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre θ. Cette loi est de moyenne $E[Y_i] = \theta$ et de variance $\text{var}[Y_i] = \theta(1-\theta)$. Comme $X_i = 2Y_i - 1$, on en déduit

$$E[X_i] = 2\theta - 1 \text{ et } \text{var}[X_i] = 4\text{var}[Y_i] = 4\theta(1-\theta).$$

3. (2pts) L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il sans biais et convergent ?
D'après la question précédent, la moyenne de l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est :

$$E[\widehat{\theta}_{\text{MV}}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\theta - 1) = \theta.$$

L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est donc un estimateur non biaisé de θ. De plus, en utilisant l'indépendance des variables X_i, on a

$$\text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} \text{var}[X_i] = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

Comme $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est un estimateur non biaisé de θ et que sa variance tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est un estimateur convergent de θ.

4. (1pt) Déterminer la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre θ. L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?
La dérivée seconde de la log-vraisemblance est

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{2\theta^2}\left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{1}{2(1-\theta)^2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Comme $E[X_i] + 1 = 2\theta$ et $1 - E[X_i] = 2(1-\theta)$, on a

$$E\left[-\frac{\partial^2 \ln L(X_1, ..., X_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right] = \frac{1}{2\theta^2} \times (2n\theta) + \frac{1}{2(1-\theta)^2} \times [2n(1-\theta)] = \frac{n}{\theta(1-\theta)}.$$

On en déduit que la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre θ est

$$BCR = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

Comme $\text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] = \text{BCR}$ et que l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est non biaisé, $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est l'estimateur efficace du paramètre θ.

5. (1pt) Montrer que l'estimateur des moments de θ construit à partir de $E[X_i]$ est égal à l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$.
D'après ce qui précède, on a :

$$E[Y_i] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E[X_i] = \theta.$$

On en déduit que l'estimateur des moments de θ construit à partir de $E[X_i]$ est :

$$\hat{\theta}_{\text{Mo}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \widehat{\theta}_{\text{MV}}.$$

6. (5pts) On suppose désormais que le paramètre θ est muni d'une loi a priori de densité

$$f(\theta) = \begin{cases} 6\theta(1-\theta) & \text{si } \theta \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- (1pt) Représenter cette densité a priori et expliquer l'information apportée par cette densité.
La courbe associée à $f(\theta) = 6\theta(1-\theta)$ est une parabole égale à 0 en $\theta = 0$ et en $\theta = 1$ et qui atteint son maximum en $\theta = \frac{1}{2}$. Cette information a priori implique que les valeurs proches de $\frac{1}{2}$ sont a priori très probables alors que celles proches de 0 ou 1 sont très improbables a priori.

- (2pts) Déterminer l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$ et montrer qu'il s'écrit

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \alpha_n \left(\frac{1}{2}\right) + (1-\alpha_n)\widehat{\theta}_{\text{MV}}.$$

où $\alpha_n \in]0,1[$ est à déterminer. Déterminer les limites de α_n lorsque n tend vers 0 et vers $+\infty$ et interpréter le résultat.
La loi a posteriori du paramètre θ vérifie

$$\begin{aligned} f(\theta|x_1,...,x_n) &\propto f(x_1,...,x_n|\theta)f(\theta) \\ &\propto \theta^{1+\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=1}^n x_i\right)}(1-\theta)^{1+\frac{1}{2}\left(n-\sum_{i=1}^n x_i\right)}\mathcal{I}_{]0,1[}(\theta). \end{aligned}$$

où $\propto$ signifie "proportionnel à". L'estimateur du maximum a posteriori du paramètre θ s'obtient par maximisation du logarithme de cette loi a posteriori. La logarithme de la loi a posteriori est

$$\left[1+\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=1}^n x_i\right)\right]\ln(\theta) + \left[1+\frac{1}{2}\left(n-\sum_{i=1}^n x_i\right)\right]\ln(1-\theta),$$

qui admet pour dérivée

$$\left[1+\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=1}^n x_i\right)\right]\frac{1}{\theta} + \left[1-\frac{1}{2}\left(n-\sum_{i=1}^n x_i\right)\right]\frac{1}{1-\theta},$$

qui s'annule pour

$$\theta = \frac{2}{2+n}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{n}{n+2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i\right]$$

Donc

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{2}{2+n}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{n}{n+2}\widehat{\theta}_{\text{MV}},$$

ce qui est le résultat attendu si on pose $\alpha_n = \frac{2}{2+n}$. Quand n tend vers $+\infty$, α_n tend vers 0, ce qui signifie qu'on oublie l'info a priori "θ est proche de $\frac{1}{2}$". Par contre, quand n tend vers 0, α_n tend vers 1, ce qui signifie qu'on fait confiance à l'info a priori et qu'on oublie l'information contenue dans les données.

- (2pts) Montrer que la loi de $\theta|X_1,...,X_n$ est une loi beta dont on déterminera les paramètres. En déduire l'estimateur MMSE de θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MMSE}}$.
D'après ce qui précède

$$f(\theta|x_1,...,x_n) \propto \theta^{1+\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=1}^n x_i\right)}(1-\theta)^{1+\frac{1}{2}\left(n-\sum_{i=1}^n x_i\right)}\mathcal{I}_{]0,1[}(\theta). \quad (1)$$

D'après les tables de loi, on observe que

$$\theta|x_1,...,x_n) \sim B\left(2+\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=1}^n x_i\right), 2+\frac{1}{2}\left(n-\sum_{i=1}^n x_i\right)\right).$$

Donc

$$\widehat{\theta}_{\text{MMSE}} = E\left[\theta | X_1, ..., X_n\right] = \frac{2 + \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^n X_i\right)}{2 + \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^n X_i\right) + 2 + \frac{1}{2}\left(n - \sum_{i=1}^n X_i\right)},$$

soit

$$\widehat{\theta}_{\text{MMSE}} = E\left[\theta | X_1, ..., X_n\right] = \frac{2 + \frac{1}{2}\left(n + \sum_{i=1}^n X_i\right)}{4 + n}.$$

Exercice 2 : Tests Statistiques (8 points)

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur de n variables aléatoires X_k indépendantes de lois de Poisson de paramètre $ik\lambda$, c'est-à-dire, telles que

$$P[X_k = x_k; \lambda] = \frac{(k\lambda)^{x_k}}{x_k!} e^{-k\lambda}, \; x_k \in \mathbb{N},$$

avec $\lambda > 0$. On notera que le paramètre de la loi de Poisson pour la variable aléatoire X_k dépend de l'indice k. On désire utiliser les observations $x_1, ..., x_n$ pour déterminer si $\lambda = \lambda_0 > 0$ ou si $\lambda = \lambda_1 > 0$ avec $\lambda_1 < \lambda_0$. On considère donc le test d'hypothèses

$$H_0 : \lambda = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \qquad \text{avec } \lambda_0 > \lambda_1 > 0.$$

1. (2pts) Montrer que la statistique du test de Neyman Pearson est $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et déterminer la région critique associée (le seuil associé à cette région sera noté S_α).
   Le test de Neyman Pearson est défini par

   $$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(x_1, ..., x_n; \theta_1)}{L(x_1, ..., x_n; \theta_0)} > S_{1,\alpha}$$

   où $S_{1,\alpha}$ est un seuil dépendant du risque de première espèce α. Mais

   $$\begin{aligned} \frac{L(x_1, ..., x_n; \theta_1)}{L(x_1, ..., x_n; \theta_0)} > S_{1,\alpha} \; & \Leftrightarrow \; \ln\left[\frac{L(x_1, ..., x_n; \theta_1)}{L(x_1, ..., x_n; \theta_0)}\right] > S_{2,\alpha} \\ & \Leftrightarrow \; \ln\left[\frac{\prod_{k=1}^n \frac{(k\lambda_1)^{x_k}}{x_k!} e^{-k\lambda_1}}{\prod_{k=1}^n \frac{(k\lambda_0)^{x_k}}{x_k!} e^{-k\lambda_0}}\right] > S_{2,\alpha} \\ & \Leftrightarrow \; [\ln(\lambda_1) - \ln(\lambda_0)] \sum_{k=1}^n x_k > S_{3,\alpha}. \end{aligned}$$

   Comme $\lambda_1 < \lambda_0$, on rejette H_0 si

   $$T_n = \sum_{k=1}^n X_k < S_\alpha.$$

   La région critique du test est donc l'ensemble des vecteurs $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $T_n < S_\alpha$ et la statistique de test est $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2. (1pt) Montrer que T_n suit une loi de Poisson dont on exprimera le paramètre noté θ_n en fonction de n et λ. Dans la suite de cet exercice, on suppose qu'on peut approcher cette loi de Poisson par une loi normale $\mathcal{N}(\theta_n, \theta_n)$.
   La fonction caractéristique de T_n vérifie :

   $$E\left[e^{iuT_n}\right] = E\left[e^{iu\sum_{k=1}^n X_k}\right] = E\left[\prod_{k=1}^n e^{iuX_k}\right].$$

En utilisant le fait que les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et la fonction caractéristique d'une loi de Poisson donnée dans les tables, on obtient

$$E\left[e^{iuT_n}\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{iuX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \exp\left[\lambda k\left(e^{it}-1\right)\right] = \exp\left[\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(e^{it}-1\right)\right],$$

soit

$$E\left[e^{iuT_n}\right] = \exp\left[\frac{n(n+1)}{2}\lambda\left(e^{it}-1\right)\right],$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\theta_n = \frac{n(n+1)}{2}\lambda$. On en déduit $T_n \sim \mathcal{P}(\theta_n)$.

3. (2pts) On note F la fonction de répartition d'une loi du normale $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant la loi normale trouvée à la question précédente, exprimer le risque de première espèce α en fonction du seuil du test de Neyman Pearson noté S_α, de la fonction F, et de n et λ_0. En déduire la valeur du seuil S_α en fonction de $F^{-1}(\alpha)$, n et λ_0.
   Le risque α est défini par

$$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P\left[T_n < S_\alpha | T_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{n(n+1)}{2}\lambda_0, \frac{n(n+1)}{2}\lambda_0\right)\right],$$

soit

$$\alpha = F\left[\frac{S_\alpha - \frac{n(n+1)}{2}\lambda_0}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}\lambda_0}}\right],$$

d'où

$$S_\alpha = \frac{n(n+1)}{2}\lambda_0 + F^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}\lambda_0}.$$

4. (3pts) Déterminer les caractéristiques opérationnelles du récepteur (courbes COR) pour ce test et montrer qu'elles ne dépendent que de $\frac{n(n+1)}{2}$, $F^{-1}(\alpha)$, λ_0 et λ_1. Les performances du test seront-elles meilleures pour $(\lambda_0, \lambda_1) = (10, 1)$ ou pour $(\lambda_0, \lambda_1) = (1000, 100)$?
   La puissance du test est définie par

$$\pi = P[\text{Rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie}] = F\left[\frac{S_\alpha - \frac{n(n+1)}{2}\lambda_1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}\lambda_1}}\right].$$

En remplaçant l'expression du seuil S_α déterminée précédemment, on obtient

$$\pi = F\left[F^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right].$$

L'allure des courbes COR pour différentes valeurs de n est représentée ci-dessous :

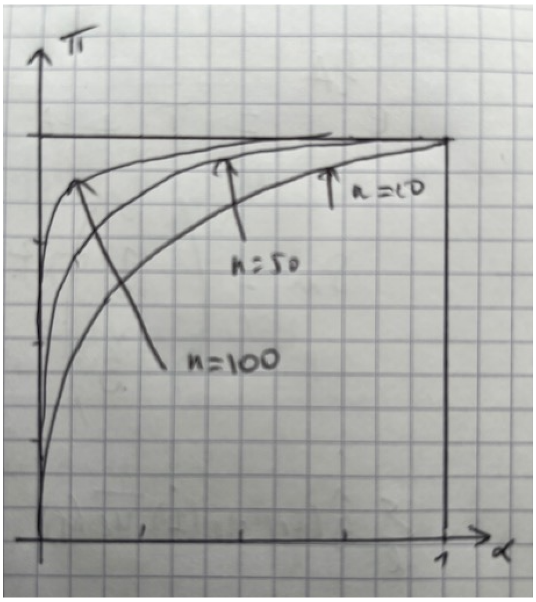

Figure 1: Allure des courbes COR pour différentes valeurs de n.

Pour les deux couples $(\lambda_0, \lambda_1) = (10, 1)$ et $(\lambda_0, \lambda_1) = (1000, 100)$, on a $\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 10$. Comme F est une fonction croissante (c'est une fonction de répartition), les performances du test sont donc d'autant meilleures que $\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}$ est grand. Pour le premier couple $(\lambda_0, \lambda_1) = (10, 1)$, on a

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{9}{1} = 9$$

tandis que pour $(\lambda_0, \lambda_1) = (1000, 100)$, on a

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{900}{10} = 90.$$

Les performances du test seront donc meilleures pour $(\lambda_0, \lambda_1) = (1000, 100)$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X=k] \qquad p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]$
Géometrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	Expression compliquée
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\ \Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	Expression compliquée
Pareto $P(a, b)$	$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]a, +\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$	Expression compliquée