EXAMEN STATISTIQUE 1MF2E

Lundi 3 avril 2023

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Estimation (12 **points)**

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ distribué suivant la même loi beta $B(1, \theta)$ de densité

$$f(x_i; \theta) = \begin{cases} \theta(1-x_i)^{\theta-1} \text{ si } x_i \in]0,1[\\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\theta > 0$.

1. (2pts) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ en fonction des variables X_i est
$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)}.$$
On prendra soin de vérifier que cette vraisemblance admet un unique maximum global.
La vraisemblance de l'échantillon s'écrit
$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\theta-1} \mathbb{I}_{]0,1[}(x_i)$$
où $\mathbb{I}_{]0,1[}$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $]0,1[$. On sait qu'il est plus facile de travailler avec la log-vraisemblance définie par
$$\ln L(x_1, ..., x_n; \theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i).$$
Cette log-vraisemblance admet pour dérivée
$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i).$$
Les variations de cette dérivée sont définies par
$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{\theta} \geq -\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i). \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \leq \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}. \end{aligned}$$
Ceci permet de faire un tableau de variation qui indique que $\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}$ est le maximum global unique de la vraisemblance, d'où
$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)}.$$

2. (2pts) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_i = -\ln(1-X_i)$ et en déduire sa fonction caractéristique (en s'aidant des tables). En déduire la loi de $T_n = -\sum_{i=1}^n \ln(1-X_i)$. En utilisant le fait que si une variable Y suit une loi gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$, son inverse $Z = \frac{1}{Y}$ suit une loi inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$, montrer que $\widehat{\theta}_{\text{MV}} = nZ_n$, où Z_n suit une loi inverse gamma $\mathcal{IG}(n,\theta)$.
La variable aléatoire Y_i est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. En faisant un changement de variables (et en faisant attention de ne pas oublier le Jacobien ;-)), on obtient la densité de Y_i

$$g(y_i;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta y_i} \text{ si } y_i > 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît une loi gamma $\mathcal{G}(1,\theta)$ dont la fonction de répartition (donnée dans la table) est

$$\phi_{Y_i}(t) = E[e^{iY_i t}] = \frac{1}{1 - i\frac{t}{\theta}}.$$

La fonction caractéristique de T_n est le produit des fonctions caractéristiques des variables Y_i car ces variables sont indépendantes. On a donc

$$\phi_{T_n}(t) = E[e^{iT_n t}] = \frac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^n}$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi gamma $\mathcal{G}(n,\theta)$, donc $T_n \sim \mathcal{G}(n,\theta)$. D'après l'indication $Z_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n [-\ln(1-X_i)]}$ suit une loi inverse gamma $\mathcal{IG}(n,\theta)$, d'où $\widehat{\theta}_{\text{MV}} = nZ_n$, où Z_n suit une loi inverse gamma $\mathcal{IG}(n,\theta)$.

3. (2pts) Déterminer la moyenne de l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$. En déduire un estimateur sans biais et convergent du paramètre θ noté θ_n^*.
En utilisant les tables de lois et le fait que $\widehat{\theta}_{\text{MV}} = nZ_n$, on obtient

$$E\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] = nE[Z_n] = n\frac{\theta}{n-1}.$$

$\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est donc un estimateur asymptotiquement non biaisé de θ. On peut construire un estimateur non biaisé en multipliant $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ par $\frac{n-1}{n}$. On obtient alors

$$\theta_n^* = (n-1)Z_n.$$

D'après la table, la variance de θ_n^* s'écrit

$$\text{var}\left[\theta_n^*\right] = (n-1)^2 \text{var}[Z_n] = (n-1)^2 \times \frac{\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\theta^2}{n-2}.$$

Comme $E\left[\theta_n^*\right] - \theta = 0$ et que la variance de θ_n^* tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, θ_n^* est un estimateur sans biais et convergent du paramètre θ.

4. (1pt) L'estimateur θ_n^* est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?
La dérivée seconde de la log-vraisemblance est

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1,...,x_n;\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2}.$$

d'où

$$E\left[-\frac{\partial^2 \ln L(X_1,...,X_n;\theta)}{\partial\theta^2}\right] = \frac{n}{\theta^2}.$$

On en déduit que la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non-biaisé de θ est

$$\text{BCR} = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L(X_1,...,X_n;\theta)}{\partial\theta^2}\right]} = \frac{\theta^2}{n}.$$

Comme $\text{var}\left[\theta_n^*\right] > \frac{\theta^2}{n}$, θ_n^* n'est pas l'estimateur efficace du paramètre θ. On notera que cet estimateur est asymptotiquement efficace.

5. (5pts) On suppose maintenant qu'on dispose d'une information a priori sur le paramètre θ résumée dans la loi a priori de densité $p(\theta)$ définie par

$$p(\theta) = \lambda \exp(-\lambda\theta)\mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}(\theta),$$

où $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$ (on remarquera que cette loi est une loi gamma $\mathcal{G}(1,\lambda)$).

- Déterminer l'estimateur MAP de θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$. Expliquer le comportement de $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$ et de $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

  La loi a posteriori du paramètre θ vérifie

$$\begin{aligned} p(\theta|x_1,...,x_n) &\propto p(x_1,...,x_n|\theta)\pi(\theta) \\ &\propto \theta^n \exp\left\{-\theta\left[\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)\right]\right\}\mathcal{I}_{]0,+\infty[}(\theta), \end{aligned}$$

  qui a la même forme que la log-vraisemblance si on remplace $\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)$ par $\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)$. L'estimateur du maximum a posteriori du paramètre θ s'obtient donc à partir de l'estimateur du maximum de vraisemblance en faisant cette même transformation, soit

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{n}{\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i)}.$$

  Remarque : l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre θ s'écrit

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{1}{\frac{\lambda}{n} + \frac{1}{\widehat{\theta}_{\text{MV}}}}$$

  On peut donc remarquer que $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$ et $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ se comportent de manière similaire lorsque $n \to +\infty$. Lorsqu'on a beaucoup de données, on a tendance à oublier l'information a priori et à faire confiance à l'estimateur du maximum de vraisemblance qui résume l'information contenue dans les données.

- Montrer que la loi a posteriori de $\theta|x_1,...,x_n$ est une loi gamma dont on déterminera les paramètres. En déduire l'estimateur de la moyenne a posteriori du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MMSE}}$.
  La loi a posteriori du paramètre θ vérifie

$$p(\theta|x_1,...,x_n) \propto \theta^n \exp\left\{-\theta\left[\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)\right]\right\}\mathcal{I}_{]0,+\infty[}(\theta).$$

  qui est une loi gamma $\mathcal{G}\left(n+1, \lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)\right)$. On en déduit

$$\widehat{\theta}_{\text{MMSE}} = E\left[\theta|X_1,...,X_n\right] = \frac{n+1}{\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i)}.$$

Exercice 2 : Test Statistique (8 points)

On considère un ensemble de variables aléatoires $(X_1, ..., X_n)$ indépendantes et de densités

$$f(x_i;\theta) = \begin{cases} \theta(1-x_i)^{\theta-1} \text{ si } x_i \in]0,1[\\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\theta > 0$. On désire tester les deux hypothèses

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0.$$

1. (2pts) À l'aide du théorème de Neyman-Pearson, montrer que la statistique du test le plus puissant est $T_n = -\sum_{i=1}^n \ln(1-X_i)$ et indiquer la région critique de ce test.
   Le test de Neyman Pearson est défini par

   $$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(x_1,...,x_n;\theta_1)}{L(x_1,...,x_n;\theta_0)} > S_{1,\alpha}$$

   où $S_{1,\alpha}$ est un seuil dépendant du risque de première espèce α. Mais

   $$\begin{aligned} \frac{L(x_1,...,x_n;\theta_1)}{L(x_1,...,x_n;\theta_0)} > S_{1,\alpha} &\Leftrightarrow \ln \frac{L(x_1,...,x_n;\theta_1)}{L(x_1,...,x_n;\theta_0)} > S_{2,\alpha} \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + (\theta_1 - \theta_0)\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i) > S_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

   Comme $\theta_1 > \theta_0$, on a la règle de décision

   $$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T_n < S_\alpha.$$

   La région critique du test est l'ensemble des vecteurs $(x_1, ..., x_n) \in]0,1[^n$ tels que $T_n < S_\alpha$ et la statistique de test est T_n.

2. (1pt) On admet que si X_i suit une loi de densité $f(x_i;\theta)$, alors $Y_i = -\ln(1-X_i)$ suit une loi gamma $\mathcal{G}(1,\theta)$. En utilisant le théorème central limite, déterminer la loi asymptotique de T_n sous les deux hypothèses.
   La loi gamma $\mathcal{G}(1,\theta)$ est de moyenne $\frac{1}{\theta}$ et de variance $\frac{1}{\theta^2}$. Donc

   $$E[T_n] = \frac{n}{\theta} \text{ et } \text{var}[T_n] = \frac{n}{\theta^2}.$$

   Comme T_n peut s'écrire comme une somme de variables indépendantes, l'application du théorème central limite permet alors d'obtenir les résultats suivants

   $$\text{Sous } H_0 : T_n \approx \mathcal{N}\left(\frac{n}{\theta_0}, \frac{n}{\theta_0^2}\right),$$

   $$\text{Sous } H_1 : T_n \approx \mathcal{N}\left(\frac{n}{\theta_1}, \frac{n}{\theta_1^2}\right),$$

   où $\approx$ signifie "de loi approchée (pour n grand)".

3. (2pts) En utilisant la loi asymptotique de la question précédente, déterminer les risques de première et seconde espèce α et β du test en fonction des paramètres θ_0 et θ_1 et de la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ notée F.
   Le risque α est défini par

   $$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P\left[T_n < S_\alpha | T_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{n}{\theta_0}, \frac{n}{\theta_0^2}\right)\right],$$

soit

$$\alpha = F\left[\frac{S_\alpha - \frac{n}{\theta_0}}{\sqrt{\frac{n}{\theta_0^2}}}\right].$$

De même

$$\beta = P[\text{Rejeter } H_1 | H_1 \text{ vraie}] = P\left[T_n \geq S_\alpha | T_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{n}{\theta_1}, \frac{n}{\theta_1^2}\right)\right],$$

soit

$$\beta = 1 - F\left[\frac{S_\alpha - \frac{n}{\theta_1}}{\sqrt{\frac{n}{\theta_1^2}}}\right].$$

4. (2pts) Déterminer les courbes COR associées à ce test montrer qu'elles ne dépendent que de n et de $\frac{\theta_1}{\theta_0}$. Tracer l'allure de ces courbes COR pour différentes valeurs de n dans une première figure et pour différentes valeurs de $\frac{\theta_1}{\theta_0}$ dans une seconde figure.
Les courbes COR expriment $\pi = 1 - \beta$ en fonction de α. On a donc

$$\pi = F\left[\frac{S_\alpha - \frac{n}{\theta_1}}{\sqrt{\frac{n}{\theta_1^2}}}\right]$$

avec $S_\alpha = F^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{n}{\theta_0^2}} + \frac{n}{\theta_0}$, soit

$$\pi = F\left[F^{-1}(\alpha)\frac{\theta_1}{\theta_0} + \sqrt{n}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} - 1\right)\right].$$

On observe donc que π ne dépend que de n et de $\frac{\theta_1}{\theta_0}$. De plus, comme F est une fonction croissante (c'est une fonction de répartition), π est une fonction croissante de n, ce qui est habituel car plus le nombre d'observations est grand, meilleure est la performance du test. La puissance du test est aussi une fonction croissante de $\frac{\theta_1}{\theta_0}$, ce qui donne des courbes COR similaires à celles représentées ci-dessous

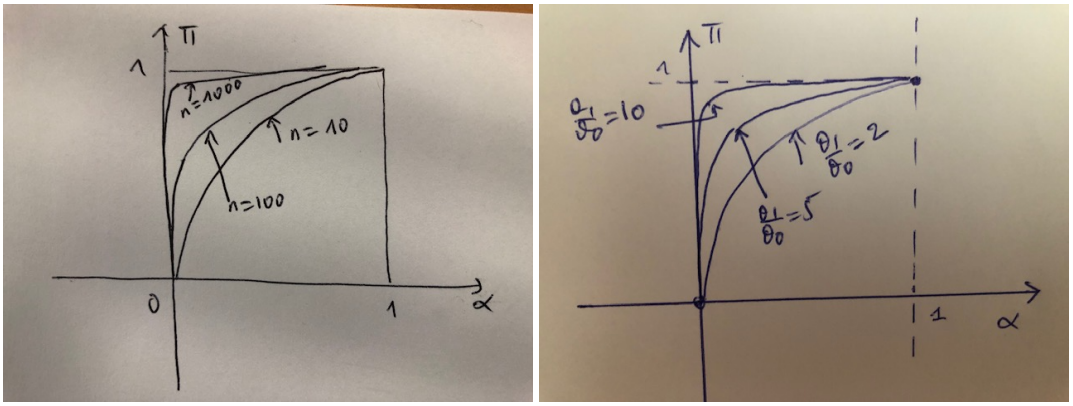

Figure 1: Allure des courbes COR pour différentes valeurs de n et de $\frac{\theta_1}{\theta_0}$.

5. (3pts) On désire vérifier que l'ensemble des observations $(x_1, ..., x_n)$ suit une loi beta $B(1, \theta)$ de paramètre $\theta = \frac{1}{2}$ à l'aide d'un test du χ^2. Déterminer la fonction de répartition de cette loi et en déduire que l'intervalle $]0, 1[$ est la réunion de trois intervalles équiprobables pour la loi $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ que l'on précisera. On compte le nombre d'observations x_i appartenant à ces trois intervalles et on trouve $K_1 = 13$, $K_2 = 8$ et $K_3 = 9$. Quelle est la valeur de la statistique du test du χ^2 ? Exprimer

le seuil de ce test noté S_α en fonction du risque α et de l'inverse de la fonction de répartition d'une loi du χ^2 dont on précisera le nombre de degrés de liberté. On donne $S_{0.05} = 5.991$. Qu'en conclut-on ?
La fonction de répartition d'une loi $B(1, \theta)$ s'écrit

$$F_\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \theta(1-u)^{\theta-1} du = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)^\theta \text{ si } x \in]0,1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Pour $\theta = \frac{1}{2}$, on obtient donc

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1-\sqrt{1-x} \text{ si } x \in]0,1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Le premier intervalle $]0, a[$ est tel que

$$F(a) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}$$

Le deuxième intervalle $[a, b]$ est tel que

$$F(b) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{9}.$$

La statistique du test du χ^2 est

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{(K_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{9}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{14}{10} = 1.4.$$

On sait que sous l'hypothèse H_0, ϕ suit une loi du χ^2 à $K-1$ degrés de liberté, donc

$$\phi \sim \chi^2_2.$$

Comme $\phi = 1.4 < S_{0.05} = 5.991$, on accepte l'hypothèse H_0 avec le risque $\alpha = 0.05$ donc on en déduit que l'échantillon est de loi $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ avec le risque $\alpha = 0.05$.

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{\left(1-i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu,\theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\boldsymbol{\Sigma})}}$ $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_p)^T \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = ke^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t-\lambda\lvert t\rvert}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = kx^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0,1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\frac{q}{p}$	$n\frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$