COURS #1 du 20/07/2025

iid = indépendantes et identiquement distribuées

Échantillon : ensemble de n va indépendants et identiquement distribués

Exemple $\quad X_i \sim N(m, \sigma^2) \qquad \theta = \begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$ vecteur des paramètres inconnus du modèle

Estimation statistique : chercher une valeur approchée de θ à l'aide des données $x_1, \dots, x_n$ ou de ses variables aléatoires associées $X_1, \dots, X_n$:

Notation $\quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix}$.

Exemple $\quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} m = E[X_i] \\ \sigma^2 = E(X_i^2) - E^2[X_i] \end{cases}$$

Erreur quadratique moyenne

biais $\quad E[\hat{\theta}] - \theta$

Variance $\quad E\left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]\right)^2\right] = Var(\hat{\theta})$

$$EQM = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}] + E[\hat{\theta}] - \theta\right)^2\right]$$

$$= \underbrace{E\left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]\right)^2\right]}_{Var(\hat{\theta})} + E\left[\left(\underbrace{E[\hat{\theta}] - \theta}_{\text{biais}}\right)^2\right] = \left(E[\hat{\theta}] - \theta\right)^2 \text{ carré du biais}$$

$$+ 2 \underbrace{E\left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]\right)\left(E[\hat{\theta}] - \theta\right)\right]}_{2(E[\hat{\theta}] - \theta)\, \underbrace{E[\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]]}_{E[\hat{\theta}] - \underbrace{E[E[\hat{\theta}]]}_{E[\hat{\theta}]} = 0}}$$

$$\boxed{EQM = \text{variance} + (\text{biais})^2}$$

Comparaison d'estimateurs

$X_i \sim N(m, \sigma^2)$ $\quad \theta = m$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\tilde{\theta}_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i X_i$$

Lequel de ces deux estimateurs préférez vous ?

Rappel

$E(aX+b) = aE[X] + b$

$Var(aX+b) = a^2 VarX$

si X et Y sont indép alors $Var(X+Y) = VarX + VarY$

Biais.

biais de $\hat{\theta}_n$: $E(\hat{\theta}_n) - \theta$

$$E(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X_i]}_{m} = m = \theta$$

$X_i \sim N(m, \sigma^2)$

$E(X_i)$ $\quad Var(X_i)$

donc $\boxed{E(\hat{\theta}_n) - \theta = 0}$

$\hat{\theta}_n$ est un estimateur non biaisé de $\theta = m$

biais de $\tilde{\theta}_n$: $E(\tilde{\theta}_n) - \theta$

$$E[\tilde{\theta}_n] = E\left[\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i X_i\right] = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} \left(i \underbrace{E(X_i)}_{m}\right)$$

$$= \frac{2m}{n(n+1)} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)}_{\frac{n(n+1)}{2}} = m = \theta$$

donc $\boxed{E[\tilde{\theta}_n] - \theta = 0}$

$\tilde{\theta}_n$ est également un estimateur non biaisé de $\theta = m$

Variances.

$$Var[\hat{\theta}_n] = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(X_i)}_{\sigma^2} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$X_1, \dots, X_n$ ind

Biais $= 0$

$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\boxed{\hat{\theta}_n \text{ est un estimateur convergent}}$

$$Var[\tilde{\theta}_n] = Var\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i X_i\right)$$

$$= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(i X_i)}_{i^2 Var(X_i) = i^2\sigma^2}$$

$X_1, \dots, X_n$ ind

$\Rightarrow$ les var iX_i ind

d'où $\quad Var(\tilde{\theta}_n) = \dfrac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$$= \frac{2}{3}\sigma^2 \, \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{4\sigma^2}{3n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Biais$(\tilde{\theta}_n) = 0$

Var$(\tilde{\theta}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad$ donc $\quad$ $\boxed{\tilde{\theta}_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta = m}$

$\frac{4}{3}\frac{\sigma^2}{n} > \frac{\sigma^2}{n}$ donc on préfèrera $\boxed{\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

<u>Exemple</u> 2 $\quad X_i \sim N(m, \sigma^2) \quad \theta = \begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \qquad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n = \hat{m} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 = \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix}$

$$\text{Biais de } \hat{\theta} = \begin{pmatrix} E[\hat{m}] - m \\ E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

on a déjà vu $E(\hat{m}) - m = 0$ (voir exo précédent)

<u>Biais de $\hat{\sigma}^2$</u> $\qquad E[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2\right]$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[(X_i - \bar{X}_n)^2]}_{E[(X_i - m + m - \bar{X}_n)^2]}$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Big[\underbrace{E[(X_i - m)^2]}_{Var(X_i) = \sigma^2} + \underbrace{E[(\bar{X}_n - m)^2]}_{Var\,\hat{m} = \frac{\sigma^2}{n}} + 2\underbrace{E[(X_i - m)(m - \bar{X}_n)]}_{3}$$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{m}$

$Var\,\hat{m} = \frac{\sigma^2}{n}$

calculé dans l'exemple

$$3 = E\Big[(X_i - m)\Big(\underbrace{m}_{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big)\Big] = \frac{1}{n} E\Big[(X_i - m)\sum_{k=1}^{n} (m - X_k)\Big]$$

$$= -\frac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n} (X_i-m)(X_k-m)\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{E\left[(X_i-m)(X_k-m)\right]}_{cov(X_i,X_k)} \quad cov(X_i,X_k) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ \underbrace{E\left[(X_i-m)^2\right]}_{Var X_i = \sigma^2} & k=i \end{cases}$$

d'où $$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n}}_{\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2}\Big)$$

$$\boxed{E[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2}$$ $\neq \sigma^2$ donc $\hat{\sigma}^2$ est un estimateur biaisé de de σ^2

on pose $(\sigma^2)^* = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$ et alors $E[(\sigma^2)^*] = \sigma^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

Un estimateur non biaisé de la variance est

$$\boxed{(\sigma^2)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}$$

<u>Calcul de la borne de Cramér-Rao</u> pour $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ estimateur de $\theta = m$

$$BCR(m) = \frac{\left(1 + b'_n(\theta)\right)^2}{E\left[-\frac{\partial^2 LnL(x_1,\dots,x_n)}{\partial m^2}\right]}$$

$x_i \sim N(m,\sigma^2)$
σ^2 connue

$$X_i \sim N(m,\sigma^2) \Rightarrow \underbrace{L(x_1,\dots,x_n)}_{\text{vraisemblance}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Log-vraisemblance $$LnL = \sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{-\frac{1}{2}\cancel{\ln(2\pi\sigma^2)}}_{0} - \frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\cancel{2}(x_i-m)(\cancel{-1})$$

Dérivée première $\quad \frac{\partial \ln L}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - m}{\sigma^2}$

Dérivée seconde $\quad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-1}{\sigma^2}\right) = \boxed{\frac{-n}{\sigma^2}}$

Espérance de la dérivée seconde $\quad E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2}\right] = \frac{-n}{\sigma^2}$

Borne $\quad \frac{\left[1 + b'_n(\theta)\right]^2}{E\left[-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2}\right]} = \frac{1}{-\left(\frac{-n}{\sigma^2}\right)} = \frac{\sigma^2}{n}$

La variance minimale d'un estimateur non biaisé de m pour le modèle $X_i \sim N(m, \sigma^2)$ est $\frac{\sigma^2}{n}$

On sait que $\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ est non biaisé et de variance $\frac{\sigma^2}{n} = BCR(m)$

donc $\hat{m}$ est le meilleur estimateur possible de m !!

on dit que $\boxed{\hat{m} \text{ est l'estimateur efficace de } m}$