EXAMEN STATISTIQUE - 1TR

Lundi 28 Novembre 2016

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Test Statistique (8 points)

On considère n variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$ indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (σ^2 étant un paramètre connu) et on définit une suite de variable aléatoire X_i comme suit

$$X_i = ra_i + Y_i, \quad i = 1, ..., n$$

où $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)^T$ est un vecteur de paramètres connu (avec $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$) et r est un paramètre inconnu dont on cherche à tester la valeur. On considère le test d'hypothèses simples

$$H_0 : r = r_0, \quad H_1 : r = r_1 \quad \text{(avec } r_1 > r_0\text{)}.$$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_i ?
2. Montrer que le test de Neyman Pearson conduit à la statistique de test
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$
et indiquer la région critique de ce test. Déterminer loi de T_n sous les deux hypothèses H_0 et H_1.
3. On note
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$
la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et F^{-1} son inverse. Déterminer la valeur du seuil K_α du test de Neyman Pearson en fonction de r_0, α, σ, des paramètres a_i et de F^{-1}.
4. Déterminer la puissance du test en fonction du seuil K_α, r_1, σ, des paramètres a_i et F. Déterminer les courbes COR du test étudié dans cet exercice et tracer la forme de ces courbes pour différentes valeurs du couple (r_0, r_1) et pour différentes valeurs du paramètre σ. Comment ces courbes COR évoluent-elles en fonction des paramètres a_i ? Expliquer.

Exercice 2 : Une vraisemblance capricieuse (8 points)

On considère n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes suivant la même loi continue de loi normale $\mathcal{N}(am, a^2\sigma^2)$ où m et σ^2 sont des paramètres connus et a est un paramètre inconnu.

1. En utilisant la valeur de $E[X_i]$, déterminer un estimateur des moments de a noté $\widehat{a}_{\text{Mo}}$. Déterminer le biais et la variance de cet estimateur. L'estimateur $\widehat{a}_{\text{Mo}}$ est-il l'estimateur efficace de a ?
2. Déterminer la vraisemblance associée à l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ notée $L(x_1, ..., x_n; a)$. Montrer que
$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; a)}{\partial a} = -\frac{n}{a^3\sigma^2}\left[a^2\sigma^2 + ma\overline{x} - S_n^2\right]$$
avec
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$
Etudier les variations de la fonction $\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n;a)}{\partial a}$ et montrer que la vraisemblance admet deux extrema locaux que l'on déterminera. Expliquer la méthode à utiliser pour déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a (on ne demande pas de le faire).

Exercice 3 : Test d'adéquation (4 **points)**

Pour tester si un dé est truqué ou pas, on le lance 60 fois et on observe le résultat du dé à chaque lancer. On regroupe ces observations dans le tableau suivant

Face du dé	1	2	3	4	5	6
Nombre d'observations	10	8	10	15	5	12

Pour décider si le dé est truqué ou pas, on effectue un test du χ^2.

1. Calculer la statistique du test du χ^2.
2. Déterminer le seuil du test du χ^2 en fonction de α et de l'inverse de la fonction de répartition d'une loi du χ^2 dont on précisera le nombre de degrés de liberté.
3. Pourquoi a-t-on $K_{0.05} < K_{0.01}$, où K_α est le seuil du test du χ^2 associé à un risque de première espèce α ?
4. Peut-on calculer la puissance du test ? Pourquoi ?

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu - 1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\frac{\theta}{\nu - 1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}$	0	2	$\dfrac{1}{1 + t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2} - 1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1 - 2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)