EXAMEN STATISTIQUE - 1SN

Lundi 24 Novembre 2025 (8h-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Estimation (12 points)

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur $(X_1, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Pareto de paramètres a et b (ce que l'on notera dans la suite $X_i \sim P(a, b)$) de densité

$$f(x_i; a, b) = \begin{cases} \frac{ba^b}{x_i^{b+1}} & \text{si } x_i > a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $a > 0$ et $b > 2$. On suppose dans la première partie de cet exercice que $a > 0$ est un paramètre connu et on étudie plusieurs estimateurs du paramètre b construits à partir de $X_1, ..., X_n$.

1. (1pt) Montrer que l'estimateur du vraisemblance du paramètre b noté $\widehat{b}_{\text{MV}}$ est défini par
$$\widehat{b}_{\text{MV}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i}{a}\right)}.$$

2. (2pts) On rappelle que si Y est une variable aléatoire réelle de loi gamma de paramètres ν et θ, notée $Y \sim \mathcal{G}(\nu, \theta)$, alors $Z = \frac{1}{Y}$ suit une loi inverse-gamma de paramètres ν et θ, i.e., $Z \sim \mathcal{IG}(\nu, \theta)$. Montrer que la variable aléatoire $Y_i = \ln\left(\frac{X_i}{a}\right)$ suit une loi gamma dont on déterminera les paramètres. Quelle est la loi de $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$? En déduire que $\widehat{b}_{\text{MV}} = nZ$ où Z est une variable aléatoire de loi inverse gamma $\mathcal{IG}(n, b)$.

3. (3pts) Déterminer le bias de l'estimateur $\widehat{b}_{\text{MV}}$ et en déduire un estimateur sans biais du paramètre b noté $\widetilde{b}_{\text{MV}}$. Déterminer la variance de $\widetilde{b}_{\text{MV}}$ et en déduire que cet estimateur est convergent.

4. (1pt) Déterminer la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre b. L'estimateur $\widetilde{b}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre b ?

5. (3pts) On suppose désormais que le paramètre b est muni d'une loi a priori de loi gamma $\mathcal{G}\left(\nu, \frac{\nu}{2}\right)$ de densité
$$f(b) \propto \begin{cases} b^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\nu b}{2}\right) & \text{si } b > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
Déterminer l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre b noté $\widehat{b}_{\text{MAP}}$. Montrer que la loi de $b|X_1, ..., X_n$ est une loi gamma dont on déterminera les paramètres. En déduire l'estimateur MMSE de b noté $\widehat{b}_{\text{MMSE}}$.

6. (2pts) On suppose désormais que les deux paramètres a et b sont inconnus. Déterminer un estimateur de (a, b) noté $\left(\widehat{a}_{\text{Mo}}, \widehat{b}_{\text{Mo}}\right)$ à l'aide de la méthode des moments.

Exercice 2 : Tests Statistiques (8 **points)**

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un vecteur $(X_1, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Pareto de paramètres a et $b = 1$ (ce que l'on notera dans la suite $X_i \sim P(a)$) de densité

$$f(x_i; a) = \begin{cases} \frac{a}{x_i^2} \text{ si } x_i > a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $a > 0$. On désire utiliser les observations $x_1, ..., x_n$ pour déterminer si $a = a_0 > 1$ ou si $a = a_1 > a_0$. On considère donc le test d'hypothèses

$$H_0 : a = a_0, \quad H_1 : a = a_1 \qquad \text{avec } a_1 > a_0 > 1.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les perfomances du test :

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \quad T_n = \min_{i=1,...,n} X_i > S_\alpha.$$

1. (3pts) Montrer que

$$P[T_n \geq x] = \begin{cases} \left(\frac{a}{x}\right)^n \text{ si } x > a \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

   En déduire le risque α du test en fonction de S_α et de a_0, puis S_α en fonction de α et de a_0.

2. (3pts) Montrer que la puissance du test vérifie

$$\pi = \begin{cases} \left(\frac{a_1}{S_\alpha}\right)^n \text{ si } S_\alpha > a_1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

   En déduire que les courbes COR de ce test sont définies par deux droites définies pour $0 < \alpha < \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^n$ et $\alpha > \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^n$. Tracer ces courbes COR pour différentes valeurs de $\frac{a_0}{a_1}$.

3. (2ts) On observe l'échantillon de taille $n = 4$ suivant : $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$ et $x_4 = 8$. On désire vérifier que les observations suivent la loi de densité $f(x_i; a)$ avec $a = 2$ à l'aide d'un test de Kolmogorov.

   - Déterminer la fonction de répartition de la loi de densité $f(x_i; a)$ notée F lorsque $a = 2$.
   - Représenter graphiquement la fonction de répartition empirique de l'échantillon $(x_1, ..., x_4)$ notée $\hat{F}(x)$.
   - Rappeler la région critique du test de Kolmogorov en fonction de F et $\hat{F}$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$p_k = P[X = k] \qquad p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géometrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	**Densité de probabilité**	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	Expression compliquée
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{u}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Beta $B(a,b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\ \Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	Expression compliquée
Pareto $P(a,b)$	$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]a, +\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$	Expression compliquée