
EXAMEN STATISTIQUE - 1MF2E

Lundi 23 mars 2026 (8h-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Estimation (12 points)

On considère n observations x_1, \dots, x_n issues d'un vecteur de n variables aléatoires X_i indépendantes de lois de Rademacher de paramètre θ , c'est-à-dire, telles que

$$P[X_i = x_i; \theta] = \theta^{\frac{1+x_i}{2}} (1-\theta)^{\frac{1-x_i}{2}}, \quad x_i \in \{-1, 1\},$$

avec $\theta \in]0, 1[$ un paramètre inconnu.

1. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\hat{\theta}_{MV}$ est :

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

2. Montrer que si X_i suit une loi de Rademacher, alors $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli. En déduire la moyenne et la variance de X_i notées $E[X_i]$ et $\text{var}[X_i]$ en fonction de θ .
3. L'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est-il sans biais et convergent ?
4. Déterminer la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre θ . L'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?
5. Montrer que l'estimateur des moments de θ construit à partir de $E[X_i]$ est égal à l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$.
6. On suppose désormais que le paramètre θ est muni d'une loi a priori de densité

$$f(\theta) = \begin{cases} 6\theta(1-\theta) & \text{si } \theta \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (1pt) Représenter cette densité a priori et expliquer l'information apportée par cette densité.
- (2pt) Déterminer l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre θ noté $\hat{\theta}_{MAP}$ et montrer qu'il s'écrit

$$\hat{\theta}_{MAP} = \alpha_n \left(\frac{1}{2} \right) + (1 - \alpha_n) \hat{\theta}_{MV}.$$

où $\alpha_n \in]0, 1[$ est à déterminer. Déterminer les limites de α_n lorsque n tend vers 0 et vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

- (2pts) Montrer que la loi de $\theta | X_1, \dots, X_n$ est une loi beta dont on déterminera les paramètres. En déduire l'estimateur MMSE de θ noté $\hat{\theta}_{MMSE}$.

Exercice 2 : Tests Statistiques (8 points)

On considère n observations x_1, \dots, x_n issues d'un vecteur de n variables aléatoires X_k indépendantes de lois de Poisson de paramètre $k\lambda$, c'est-à-dire, telles que

$$P[X_k = x_k; \lambda] = \frac{(k\lambda)^{x_k}}{x_k!} e^{-k\lambda}, \quad x_k \in \mathbb{N},$$

avec $\lambda > 0$. On notera que le paramètre de la loi de Poisson pour la variable aléatoire X_k dépend de l'indice k et on rappelle que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. On désire utiliser les observations x_1, \dots, x_n pour déterminer si $\lambda = \lambda_0 > 0$ ou si $\lambda = \lambda_1 > 0$ avec $\lambda_1 < \lambda_0$. On considère donc le test d'hypothèses

$$H_0 : \lambda = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \quad \text{avec } \lambda_0 > \lambda_1 > 0.$$

1. Montrer que la statistique du test de Neyman Pearson est $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et déterminer la région critique associée (le seuil associé à cette région sera noté S_α).
2. Montrer que T_n suit une loi de Poisson de paramètre $\theta_n = \frac{n(n+1)\lambda}{2}$. Dans la suite de cet exercice, on suppose qu'on peut approcher cette loi de Poisson par une loi normale $\mathcal{N}(\theta_n, \theta_n)$.
3. On note F la fonction de répartition d'une loi du normale $\mathcal{N}(0, 1)$. En utilisant la loi normale trouvée à la question précédente, exprimer le risque de première espèce α en fonction du seuil du test de Neyman Pearson noté S_α , de la fonction F , et de n et λ_0 . En déduire la valeur du seuil S_α en fonction de $F^{-1}(\alpha)$, n et λ_0 .
4. Déterminer la puissance du test puis les caractéristiques opérationnelles du récepteur (COR). Montrer que ces courbes COR ne dépendent que de $\frac{n(n+1)}{2}$, $F^{-1}(\alpha)$, λ_0 et λ_1 . Les performances du test seront-elles meilleures pour $(\lambda_0, \lambda_1) = (10, 1)$ ou pour $(\lambda_0, \lambda_1) = (1000, 100)$?

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$$p_k = P[X = k] \quad p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$$

LOI	Probabilités	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}(1 - e^{itn})}{n(1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	np	npq	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n \frac{q}{p}$	$n \frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

LOI	Densité de probabilité	Moyenne	Variance	Fonction Caractéristique
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x > 0$ <p>avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$</p>	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{(1 - it/\theta)^\nu}$
Inverse gamma $\mathcal{IG}(\nu, \theta)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x > 0$ <p>avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$</p>	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	Expression compliquée
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{- x }, \quad x \in \mathbb{R}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale univariée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Normale multivariée $\mathcal{N}_p(\mathbf{m}, \Sigma)$	$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1}(x-m)}$ $K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}}$ $x \in \mathbb{R}^p$	\mathbf{m}	Σ	$e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}}$
Khi2 χ_ν^2 $\Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}$ $\nu \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $\mathcal{C}_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi \lambda \left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda t }$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$ $a > 0, b > 0$ $x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	Expression compliquée
Pareto $P(a, b)$	$f(x) = \frac{b a^b}{x^{b+1}}$ $a > 0, b > 0$ $x \in]a, +\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$	Expression compliquée