

Exercice 1. Durée d'attente à un feu rouge.

On considère la variable aléatoire "durée d'attente à un feu rouge". La durée maximale d'attente à ce feu rouge est notée θ , paramètre inconnu strictement positif. On observe un échantillon t_1, \dots, t_n de taille n , où t_i désigne la durée d'attente observée pour le $i^{\text{ème}}$ individu. On fait l'hypothèse que les variables aléatoires T_i associées aux observations t_i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, \theta]$, i.e., $T_i \sim U[0, \theta]$.

1. Représenter le graphe de la densité de la loi $U[0, \theta]$ et préciser ses paramètres moyenne et variance.
2. On désire estimer le paramètre θ . Déterminer le biais et la variance de l'estimateur $\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$.
Montrer que $\hat{\theta}_1 = 2\bar{T}$ est un estimateur sans biais et convergent en probabilité de θ .
3. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $Y_n = \sup_i T_i$.
 - En utilisant l'équivalence des événements suivante $Y_n < y \iff T_i < y, \forall i = 1, \dots, n$, calculer la fonction de répartition de Y_n . En déduire sa densité et calculer $E[Y_n]$ et $\text{var}(Y_n)$.
 - Montrer que $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} Y_n$ est un estimateur sans biais et convergent en probabilité de θ .
4. Lequel des deux estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ choisiriez-vous pour estimer θ ?

Exercice 2. La durée de fonctionnement d'un matériel électrique est représentée par une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Weibull de densité :

$$f(x; \theta, \lambda) = \frac{\lambda}{\theta} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{x^\lambda}{\theta}\right\} \quad x > 0$$

avec $\theta > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que λ est connu.

1. Déterminer la loi de $U = X^\lambda$ puis calculer $E(X^\lambda)$ et $\text{Var}(X^\lambda)$.
2. On considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) de même loi que X . Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ . Cet estimateur est-il sans biais ? convergent ? efficace ? Calculer son erreur quadratique moyenne.

Exercice 3. Estimation de l'écart type

Soient x_1, \dots, x_n les réalisations respectives de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Déterminer un minorant de la variance de tout estimateur sans biais de σ .
2. Déterminer a pour que

$$\hat{\sigma} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

soit un estimateur sans biais de σ . L'estimateur obtenu $\hat{\sigma}$ est-il convergent ? efficace ?

Exercice 4. Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes de même loi de densité :

$$f(x) = \beta e^{\beta(\alpha-x)} 1_{[\alpha, +\infty[}(x)$$

1. α étant connu, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\omega = 1/\beta$ noté $\hat{\omega}$. Vérifier qu'il est sans biais et convergent. Montrer enfin que $\hat{\omega}$ est l'estimateur efficace de ω .
2. β étant connu, étudier l'estimateur du maximum de vraisemblance de α noté $\hat{\alpha}$. On admet que la densité de probabilité de $\hat{\alpha}$ est :

$$\pi(u) = n\beta e^{n\beta(\alpha-u)} 1_{[\alpha, +\infty[}(u)$$

En s'aidant de ce qui a été fait à la première question, déterminer le biais et la variance de $\hat{\alpha}$. En déduire un estimateur sans biais et convergent de α noté $\tilde{\alpha}$. Que dire de l'efficacité de $\tilde{\alpha}$?

3. β étant connu, déterminer l'estimateur de α obtenu à l'aide de la méthode des moments appliquée à $E[X_i]$ noté $\bar{\alpha}$. Comparer les deux estimateurs $\bar{\alpha}$ et $\hat{\alpha}$.

Exercice 1

1) La densité de T_i est

$$f(t_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } t_i \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a de plus (voir tables ou calculs élémentaires)

$$E [T_i] = \frac{\theta}{2} \text{ et } \text{var} [T_i] = \frac{\theta^2}{12}$$

2)

$$\begin{aligned} E [\bar{T}] &= E [T_1] = \frac{\theta}{2} \\ \text{var} [\bar{T}] &= \frac{\text{var} [T_1]}{n} = \frac{\theta^2}{12n} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E [\hat{\theta}_1] &= 2E [\bar{T}] = \theta \\ \text{var} [\hat{\theta}_1] &= 4\text{var} [\bar{T}] = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_1$ est donc un estimateur non biaisé et convergent de θ .

3) La vraisemblance de t_1, \dots, t_n est

$$f(t_1, \dots, t_n; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & \text{si } t_i \in [0, \theta], \forall i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Maximiser la vraisemblance de t_1, \dots, t_n revient à maximiser $\frac{1}{\theta^n}$ sous les contraintes $t_i \in [0, \theta], \forall i = 1, \dots, n$. Puisque $\frac{1}{\theta^n}$ est une fonction décroissante de θ et que les contraintes imposent $t_i \leq \theta, \forall i = 1, \dots, n$, on en déduit

$$Y_n = \sup_i T_i$$

a) On a

$$\begin{aligned} P [Y_n < y] &= P [T_1 < y \text{ et } T_2 < y \dots \text{ et } T_n < y] \\ &= \prod_{k=1}^n P [T_k < y] \\ &= P [T_1 < y]^n \\ &= \begin{cases} \left(\frac{y}{\theta}\right)^n & \text{si } y \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } y \geq \theta \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La densité de Y_n est donc

$$f(y) = \begin{cases} n \frac{y^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } y \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E [Y_n] &= \int_0^\theta n \frac{y^n}{\theta^n} dy = \frac{n\theta}{n+1} \\ E [Y_n^2] &= \int_0^\theta n \frac{y^{n+1}}{\theta^n} dy = \frac{n\theta^2}{n+2} \end{aligned}$$

et donc

$$\text{var}[Y_n] = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}Y_n$ est donc un estimateur non biaisé de θ . Puisque

$$\text{var}[\hat{\theta}_2] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \text{var}[Y_n] = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}Y_n$ est un estimateur convergent de θ .

4) Puisque la variance de $\hat{\theta}_2$ est plus faible que la variance de $\hat{\theta}_1$ (au moins pour n grand car $\text{var}[\hat{\theta}_2] \simeq \frac{\theta^2}{n^2}$ et $\text{var}[\hat{\theta}_1] = \frac{\theta^2}{3n}$), on choisira l'estimateur $\hat{\theta}_2$.

Exercice 2

1) un changement de variables élémentaire conduit à

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{u}{\theta}\right) & \text{pour } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$

Des calculs simples ou les tables de la loi gamma permettent d'obtenir

$$E[U] = \theta \text{ et } \text{var}[U] = \theta^2$$

2) La vraisemblance de t_1, \dots, t_n est

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n; \theta) &= \prod_{k=1}^n \left[\frac{\lambda}{\theta} x_k^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{x_k^\lambda}{\theta}\right\} \right] \quad x_i > 0 \\ &= \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^n \left[\prod_{k=1}^n x_k \right]^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^n x_k^\lambda\right\} \end{aligned}$$

et son logarithme

$$\ln f(x_1, \dots, x_n; \theta) = n \ln \lambda - n \ln \theta + (\lambda - 1) \ln \left[\prod_{k=1}^n x_k \right] - \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^n x_k^\lambda$$

Puisque le domaine de définition de la vraisemblance est indépendant de θ , la recherche du maximum de vraisemblance de θ se fait comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} &\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^n x_k^\lambda \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^\lambda \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^\lambda$$

En remarquant que $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k$, on a

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_n] &= E[U_1] = \theta \\ \text{var}[\hat{\theta}_n] &= \frac{\text{var}(U_1)}{n} = \frac{\theta^2}{n} \end{aligned}$$

Donc $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de θ . La borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de θ est

$$\begin{aligned} \text{BCR}(\theta) &= \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right]} \\ &= \frac{-1}{\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} E\left[\sum_{k=1}^n X_k^\lambda\right]} \\ &= \frac{-1}{\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} n\theta} = \frac{\theta^2}{n} \end{aligned}$$

Puisque $\text{var}(\hat{\theta}_n) = \text{BCR}(\theta)$, $\hat{\theta}_n$ est l'estimateur efficace de θ . Son erreur quadratique moyenne est

$$E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = \text{var}\left[\hat{\theta}_n\right] + \text{biais}^2\left[\hat{\theta}_n\right] = \frac{\theta^2}{n}$$

Exercice 3

1) Un minorant de la variance de tout estimateur non biaisé de σ est donné par la borne de Cramér-Rao

$$\text{BCR}(\sigma) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_1, \dots, x_n; \sigma)}{\partial \sigma^2}\right]}.$$

La vraisemblance de l'échantillon gaussien est

$$f(x_1, \dots, x_n; \sigma) = \frac{1}{\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

d'où la log-vraisemblance

$$\ln f(x_1, \dots, x_n; \sigma) = -n \ln(\sigma) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Les dérivées de cette log-vraisemblance se calculent facilement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x_1, \dots, x_n; \sigma)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \frac{\partial^2 \ln f(x_1, \dots, x_n; \sigma)}{\partial \sigma^2} &= \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_1, \dots, x_n; \sigma)}{\partial \sigma^2}\right] = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \times (n\sigma^2) = -\frac{2n}{\sigma^2}.$$

La borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de σ est donc

$$\text{BCR}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2n}.$$

2) Pour que

$$\hat{\sigma} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

soit un estimateur sans biais de σ , il faut

$$E[\hat{\sigma}] = \sigma$$

c'est-à-dire

$$E[\hat{\sigma}] = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n E[|X_i|] = aE[|X_1|] = \sigma.$$

Quelques calculs élémentaires permettent de calculer $E[|X_1|]$

$$\begin{aligned} E[|X_1|] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \end{aligned}$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

La variance de cet estimateur est

$$\text{var}[\hat{\sigma}] = \frac{a^2}{n} \text{var}[|X_1|].$$

La variance de $|X_1|$ se calcule comme suit

$$\text{var}[|X_1|] = E[X_1^2] - E^2[|X_1|] = \sigma^2 - \frac{2}{\pi} \sigma^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2$$

d'où

$$\text{var}[\hat{\sigma}] = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{\sigma^2}{n}.$$

L'estimateur $\hat{\sigma}$ est donc convergent mais il n'est pas efficace. On montrerait que

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

est l'estimateur efficace du paramètre σ .

Exercice 4

1) La vraisemblance de x_1, \dots, x_n est

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n; \omega) &= \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{\omega} \exp\left\{-\frac{\alpha - x_k}{\omega}\right\} \right] \quad x_k > \alpha \\ &= \left(\frac{1}{\omega}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\omega} \left(\sum_{k=1}^n x_k - n\alpha\right)\right\} \end{aligned}$$

et son logarithme

$$\ln f(x_1, \dots, x_n; \omega) = -n \ln \omega - \frac{1}{\omega} \left(\sum_{k=1}^n x_k - n\alpha\right)$$

Puisque le domaine de définition de la vraisemblance est indépendant de ω , la recherche du maximum de vraisemblance de ω se fait comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x_1, \dots, x_n; \omega)}{\partial \omega} &\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k - n\alpha \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \omega \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \alpha$$

On montre aisément que $U_k = X_k - \alpha$ suit une loi exponentielle de densité

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \exp\left(-\frac{u}{\omega}\right) & \text{pour } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$

Donc comme dans l'exercice précédent

$$\begin{aligned} E[\hat{\omega}] &= E[U_1] = \omega \\ \text{var}[\hat{\omega}] &= \frac{\text{var}(U_1)}{n} = \frac{\omega^2}{n} \end{aligned}$$

Donc $\hat{\omega}$ est un estimateur sans biais et convergent de ω . La borne de Cramer-Rao d'un estimateur non biaisé de ω est

$$\text{BCR}(\omega) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_1, \dots, x_n; \omega)}{\partial \omega^2}\right]} = \frac{\omega^2}{n}$$

Puisque $\text{var}[\hat{\omega}] = \text{BCR}(\omega)$, $\hat{\omega}$ est l'estimateur efficace de ω .

2) La vraisemblance de x_1, \dots, x_n est la même que précédemment mais elle est maintenant paramétrée par α

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n; \alpha) &= \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{\omega} \exp\left\{-\frac{\alpha - x_k}{\omega}\right\} \right] 1_{[\alpha, +\infty[}(x_i) \\ &= \left(\frac{1}{\omega}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\omega} \left(\sum_{k=1}^n x_k - n\alpha\right)\right\} \prod_{k=1}^n 1_{[\alpha, +\infty[}(x_i) \\ &= \left(\frac{1}{\omega}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{n\alpha}{\omega}\right\} \prod_{k=1}^n 1_{[\alpha, +\infty[}(x_i). \end{aligned}$$

La vraisemblance est une fonction croissante de α mais α doit vérifier les contraintes

$$x_i \geq \alpha, \forall i = 1, \dots, n.$$

On en déduit

$$\hat{\alpha}_{\text{MV}} = \min_{i=1, \dots, n} X_i.$$

La densité de $\min_{i=1, \dots, n} X_i$ était donnée dans l'énoncé

$$\pi(u) = n\beta e^{n\beta(\alpha-u)} 1_{[\alpha, +\infty[}(u).$$

On remarque qu'elle est similaire à celle de X_i mais que β devient $n\beta$. On en déduit que la moyenne de $\hat{\alpha}_{\text{MV}}$ est égale à l'expression de $E[X_i]$ dans laquelle on a remplacé β par $n\beta$, soit

$$E[\hat{\alpha}_{\text{MV}}] = \alpha + \frac{1}{n\beta}.$$

De même

$$\text{var}[\hat{\alpha}_{\text{MV}}] = \frac{1}{n^2\beta^2}.$$

On en déduit que

$$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}_{\text{MV}} - \frac{1}{n\beta} = \min_{i=1,\dots,n} X_i - \frac{1}{n\beta}$$

est un estimateur non biaisé de α . La variance de cet estimateur est

$$\text{var}[\tilde{\alpha}] = \frac{1}{n^2\beta^2}.$$

Comme cette variance tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ et que l'estimateur $\tilde{\alpha}$ est non biaisé, il est convergent. Comme les bornes du domaine de définition de la densité de X_i dépendent de α , il n'existe pas de borne de Cramér-Rao et donc l'efficacité de $\tilde{\alpha}$ n'a pas de sens.

3) La moyenne de X_i est

$$E[X_i] = \alpha + \frac{1}{\beta}.$$

L'estimateur de α obtenu à l'aide de la méthode des moments appliquée à $E[X_i]$ est

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{\beta}.$$

Cet estimateur est non biaisé puisque

$$E[\bar{\alpha}] = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\alpha + \frac{1}{\beta} \right) = \alpha.$$

La variance de l'estimateur $\bar{\alpha}$ est

$$\text{var}[\bar{\alpha}] = \frac{\text{var}(X_1)}{n} = \frac{1}{n\beta^2}.$$

L'estimateur $\bar{\alpha}$ est donc également convergent mais la vitesse de convergence (de l'ordre de $\frac{1}{n}$) est plus faible que celle de $\tilde{\alpha}$ (qui est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$). On préférera donc $\tilde{\alpha}$ à $\bar{\alpha}$.