Exercice 1. Durée d'attente à un feu rouge.
On considère la variable aléatoire "durée d'attente à un feu rouge". La durée maximale d'attente à ce feu rouge est notée θ, paramètre inconnu strictement positif. On observe un échantillon $t_1, ..., t_n$ de taille n, où t_i désigne la durée d'attente observée pour le $i^{ème}$ individu. On fait l'hypothèse que les variables aléatoires T_i associées aux observations t_i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, \theta]$, i.e., $T_i \sim U[0, \theta]$.

1. Représenter le graphe de la densité de la loi $U[0, \theta]$ et préciser ses paramètres moyenne et variance.
2. On désire estimer le paramètre θ. Déterminer le biais et la variance de l'estimateur $\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$. Montrer que $\widehat{\theta}_1 = 2\overline{T}$ est un estimateur sans biais et convergent en probabilité de θ.

Exercice 2.
La durée de fonctionnement d'un matériel électrique est représentée par une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Weibull de densité :

$$f(x; \theta, \lambda) = \frac{\lambda}{\theta} x^{\lambda - 1} \exp\left\{-\frac{x^\lambda}{\theta}\right\} \qquad x > 0$$

avec $\theta > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que λ est connu.

1. Déterminer la loi de $U = X^\lambda$ puis calculer $E\left(X^\lambda\right)$ et Var $\left(X^\lambda\right)$.
2. On considère un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de même loi que X. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il sans biais ? convergent ? efficace ? Calculer son erreur quadratique moyenne.

Exercice 3. Estimation de l'écart type
Soient $x_1, ..., x_n$ les réalisations respectives de n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes et de même loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Déterminer un minorant de la variance de tout estimateur sans biais de σ.
2. Déterminer a pour que
$$\widehat{\sigma} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$
soit un estimateur sans biais de σ. L'estimateur obtenu $\widehat{\sigma}$ est-il convergent ? efficace ?

Exercice 4.
Dans la fabrication en grande série, on réalise l'expérience suivante : on prélève au hasard des pièces que l'on contrôle et on note le nombre de pièces bonnes tirées jusqu'à l'obtention de la première pièce défectueuse qui est pour la $i$ème série une variable aléatoire X_i de loi géométrique de paramètre p :

$$P[X_i = x_i] = p(1-p)^{x_i} \qquad x_i \in \mathbb{N}.$$

Pour une telle loi géométrique, on montre que $E[X_i] = \frac{1-p}{p}$ et var $[X_i] = \frac{1-p}{p^2}$. On désire estimer le paramètre $\theta = \frac{1-p}{p}$ à partir de n observations $x_1, ..., x_n$. On suppose que $(x_1, ..., x_n)$ est issu d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ (i.e., que les n variables aléatoires X_i sont indépendantes).

1. Écrire la vraisemblance de $(X_1, ..., X_n)$ au point $(x_1, ..., x_n)$ en fonction de θ. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ du paramètre θ (on prendra soin d'étudier les variations de la vraisemblance en fonction de θ).

2. L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il un estimateur sans biais et convergent de θ ?

3. L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?

4. Déterminateur l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p et l'estimateur des moments de p construit à partir de l'expression de $E[X_i]$.

Exercice 5.
On considère des variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre θ

$$P[X_i = x_i; \theta] = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

où $\theta \in]0, 1[$ est un paramètre inconnu. On remarquera qu'avec cette définition $P[X_i = 0] = 1 - \theta$ et $P[X_i = 1] = \theta$ et que les variables X_i sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

1. Déterminer la vraisemblance de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ et montrer qu'elle admet un maximum global unique pour une valeur de θ que l'on précisera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\hat{\theta}_{\text{MV}}$.

2. L'estimateur $\hat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il sans biais et convergent ?

3. Déterminer la borne de Cramér-Rao pour les estimateurs non-biaisés de θ. L'estimateur $\hat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?

4. Déterminer $E[X_i]$ et en déduire un estimateur des moments du paramètre θ.

Exercice 6
On considère n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes suivant la même loi discrète à valeurs dans l'ensemble des entiers non nuls $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par

$$P[X_i = x_i; \theta] = \theta (1-\theta)^{x_i - 1}, \qquad x_i \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, ...$$

avec $\theta \in]0, 1[$. On admettra que la moyenne et la variance d'une telle loi appelée "loi géométrique de paramètre θ" sont définies par $E[X_i] = \frac{1}{\theta}$ et var$(X_i) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$.

1. (2pts) Montrer que la vraisemblance de $(x_1, ..., x_n)$ admet un unique maximum global pour une valeur de θ que l'on déterminera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$.

2. (2pts) Rappeler les propriétés asymptotiques de l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$. Devant la difficulté d'étudier ces propriétés pour n fini, on propose d'estimer le paramètre $a = \frac{1}{\theta}$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a noté $\hat{a}_{\text{MV}}$? Cet estimateur est-il sans biais et convergent ?

3. (2pts) Déterminer la borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre a. L'estimateur $\widehat{a}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre a ?

Exercice 1

1) La densité de T_i est

$$f(t_i;\theta)=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{\theta}\text{ si } t_i\in[0,\theta]\\ 0\text{ sinon}\end{array}\right.$$

On a de plus (voir tables ou calculs élémentaires)

$$E[T_i]=\frac{\theta}{2}\text{ et var}[T_i]=\frac{\theta^2}{12}$$

2)

$$\begin{aligned}E\left[\bar{T}\right] &= E[T_1]=\frac{\theta}{2}\\ \text{var}\left[\bar{T}\right] &= \frac{\text{var}[T_1]}{n}=\frac{\theta^2}{12n}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}E\left[\widehat{\theta}_1\right] &= 2E\left[\bar{T}\right]=\theta\\ \text{var}\left[\widehat{\theta}_1\right] &= 4\text{var}\left[\bar{T}\right]=\frac{\theta^2}{3n}\underset{n\to\infty}{\to}0\end{aligned}$$

$\widehat{\theta}_1$ est donc un estimateur non biaisé et convergent de θ.

Exercice 2

1) un changement de variables élémentaire conduit à

$$f(u)=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{u}{\theta}\right)\text{ pour } u>0\\ 0\text{ si } u\leq 0\end{array}\right.$$

Des calculs simples ou les tables de la loi gamma permettent d'obtenir

$$E[U]=\theta\text{ et var}[U]=\theta^2$$

2) La vraisemblance de $t_1,...,t_n$ est

$$\begin{aligned}f(x_1,...,x_n;\theta) &= \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\lambda}{\theta}x_k^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{x_k^\lambda}{\theta}\right\}\right] \qquad x_i>0\\ &= \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^n\left[\prod_{k=1}^{n}x_k\right]^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}x_k^\lambda\right\}\end{aligned}$$

et son logarithme

$$\ln f(x_1,...,x_n;\theta)=n\ln\lambda-n\ln\theta+(\lambda-1)\ln\left[\prod_{k=1}^{n}x_k\right]-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}x_k^\lambda$$

Puisque le domaine de définition de la vraisemblance est indépendant de θ, la recherche du maximum de vraisemablance de θ se fait comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln f(x_1,...,x_n;\theta)}{\partial\theta} &\geq 0\Leftrightarrow-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{k=1}^{n}x_k^\lambda\geq 0\\ &\Leftrightarrow \theta\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^\lambda\end{aligned}$$

d'où

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^{\lambda}$$

En remarquant que $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$, on a

$$\begin{aligned} E\left[\hat{\theta}_n\right] &= E\left[U_1\right] = \theta \\ \text{var}\left[\hat{\theta}_n\right] &= \frac{\text{var}\left(U_1\right)}{n} = \frac{\theta^2}{n} \end{aligned}$$

Donc $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de θ. La borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de θ est

$$\begin{aligned} \text{BCR}\left(\theta\right) &= \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial \theta^2}\right]} \\ &= \frac{-1}{\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^{\lambda}\right]} \\ &= \frac{-1}{\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}n\theta} = \frac{\theta^2}{n} \end{aligned}$$

Puisque var$(\hat{\theta}_n) =$ BCR (θ), $\hat{\theta}_n$ est l'estimateur efficace de θ. Son erreur quadratique moyenne est

$$E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = \text{var}\left[\hat{\theta}_n\right] + \text{biais}^2\left[\hat{\theta}_n\right] = \frac{\theta^2}{n}$$

Exercice 3

1) Un minorant de la variance de tout estimateur non biaisé de σ est donné par la borne de Cramér-Rao

$$\text{BCR}\left(\sigma\right) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_1,\ldots,x_n;\sigma)}{\partial \sigma^2}\right]}.$$

La vraisemblance de l'échantillon gaussien est

$$f(x_1,...,x_n;\sigma) = \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

d'où la log-vraisemblance

$$\ln f(x_1,...,x_n;\sigma) = -n\ln(\sigma) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Les dérivées de cette log-vraisemblance se calculent facilement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x_1,...,x_n;\sigma)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \frac{\partial^2 \ln f(x_1,...,x_n;\sigma)}{\partial \sigma^2} &= \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_1,...,x_n;\sigma)}{\partial \sigma^2}\right] = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\times\left(n\sigma^2\right) = -\frac{2n}{\sigma^2}.$$

La borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de σ est donc

$$\text{BCR}\,(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2n}.$$

2) Pour que

$$\widehat{\sigma} = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

soit un estimateur sans biais de σ, il faut

$$E[\widehat{\sigma}] = \sigma$$

c'est-à-dire

$$E[\widehat{\sigma}] = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}E[|X_i|] = aE[|X_1|] = \sigma.$$

Quelques calculs élémentaires permettent de calculer $E[|X_1|]$

$$\begin{aligned} E[|X_1|] &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u|}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)du \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}u\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \end{aligned}$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et

$$\widehat{\sigma} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i|.$$

La variance de cet estimateur est

$$\text{var}[\widehat{\sigma}] = \frac{a^2}{n}\text{var}[|X_1|].$$

La variance de $|X_1|$ se calcule comme suit

$$\text{var}[|X_1|] = E[X_1^2] - E^2[|X_1|] = \sigma^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2$$

d'où

$$\text{var}[\widehat{\sigma}] = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{\sigma^2}{n}.$$

L'estimateur $\widehat{\sigma}$ est donc convergent mais il n'est pas efficace. On montrerait que

$$\widetilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

est l'estimateur efficace du paramètre σ.

Exercice 4

1) La vraisemblance de $(X_1, ..., X_n)$ est :

$$\begin{aligned} L(x_1, ..., x_n; \theta) &= P[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i] = \prod_{i=1}^{n} [p(1-p)^{x_i}] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Avec la notation standard $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, puisque $p = \frac{1}{1+\theta}$, on en déduit :

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{(1+\theta)^n}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{n\overline{x}}$$

Lorsqu'on étudie

$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-n}{1+\theta} + n\overline{x}\frac{1}{\theta(\theta+1)} \geq 0$$

on obtient $\theta \leq \overline{x}$. Puisque la vraisemblance est maximale pour $\theta = \overline{x}$ et que ce maximum est un maximum global unique, on déduit

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

2) On a

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] &= E[X_1] = \theta \text{ donc } \widehat{\theta}_{\text{MV}} \text{ est un estimateur non biaisé de } \theta \\ \text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] &= \frac{\text{var}[X_1]}{n} = \frac{1}{n}\frac{1-p}{p}\frac{1}{p} = \frac{\theta(1+\theta)}{n} \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est un estimateur non biaisé de θ et que $\lim_{n\to\infty} \text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] = 0$, $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ converge en moyenne quadratique vers θ.

3) On a

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{(1+\theta)^2} + n\overline{x}\frac{-(1+2\theta)}{\theta^2(\theta+1)^2}$$

Donc

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L(X_1, ..., X_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right] = \frac{n}{(1+\theta)^2} + n\theta\frac{-(1+2\theta)}{\theta^2(\theta+1)^2} = -\frac{n}{\theta(1+\theta)}$$

On en déduit que la borne de Rao-Cramer pour un estimateur non biaisé de θ est :

$$\text{BRC}(\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{n} = \text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right]$$

$\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est donc l'estimateur efficace de θ.

4) Comme $\theta = \frac{1-p}{p}$, on a $p = \frac{1}{1+\theta}$. En utilisant le principe d'invariance fonctionnelle, on en déduit

$$\widehat{p}_{\text{MV}} = \frac{1}{1+\widehat{\theta}_{\text{MV}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Comme $E[X_i] = \frac{1-p}{p}$, on a $p = \frac{1}{1+E[X_i]}$. Donc l'estimateur des moments de p construit à partir de $E[X_i]$ est

$$\widehat{p}_{\text{Mo}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} = \widehat{p}_{\text{MV}}.$$

Exercice 5

1) La vraisemblance de $(X_1, ..., X_n)$ est :

$$\begin{aligned} L(x_1, ..., x_n; \theta) &= P[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i] = \prod_{i=1}^{n} \left[\theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}\right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Avec la notation standard $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, on en déduit :

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \theta^{n\overline{x}} (1-\theta)^{n-n\overline{x}}$$

Lorsqu'on étudie

$$\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n\overline{x}}{\theta} - (n - n\overline{x})\frac{1}{1-\theta} \geq 0$$

on obtient $\theta \leq \overline{x}$. Puisque la vraisemblance est maximale pour $\theta = \overline{x}$ et que ce maximum est un maximum global unique, on déduit

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

2) On a

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] &= E[X_1] = \theta \text{ donc } \widehat{\theta}_{\text{MV}} \text{ est un estimateur non biaisé de } \theta \\ \text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] &= \frac{\text{var}[X_1]}{n} = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est un estimateur non biaisé de θ et que $\lim_{n\to\infty} \text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right] = 0$, $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ converge en moyenne quadratique vers θ.

3) On a

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-n\overline{x}}{\theta^2} + \frac{n\overline{x} - n}{(1-\theta)^2}.$$

Donc

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L(X_1, ..., X_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right] = \frac{-n}{\theta} + \frac{n(\theta-1)}{(1-\theta)^2} = \frac{-n}{\theta(1-\theta)}.$$

On en déduit que la borne de Rao-Cramer pour un estimateur non biaisé de θ est :

$$\text{BRC}(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \text{var}\left[\widehat{\theta}_{\text{MV}}\right]$$

$\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est donc l'estimateur efficace de θ.

4) On a $E[X_i] = \theta$, donc l'estimateur des moments de θ construit à partir de $E[X_i]$ est

$$\widehat{\theta}_{\text{Mo}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} = \widehat{\theta}_{\text{MV}}.$$

Exercice 6

On considère n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes suivant la même loi discrète à valeurs dans l'ensemble des entiers non nuls $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ définie par

$$P[X_i = x_i; \theta] = \theta(1-\theta)^{x_i - 1}, \qquad x_i \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, ...$$

avec $\theta \in]0,1[$. On admettra que la moyenne et la variance d'une telle loi appelée "loi géométrique de paramètre θ" sont définies par $E[X_i] = \frac{1}{\theta}$ et var$(X_i) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$.

1. (2pts) Montrer que la vraisemblance de $(x_1, ..., x_n)$ admet un unique maximum global pour une valeur de θ que l'on déterminera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\mathrm{MV}}$.

2. (2pts) Rappeler les propriétés asymptotiques de l'estimateur $\widehat{\theta}_{\mathrm{MV}}$. Devant la difficulté d'étudier ces propriétés pour n fini, on propose d'estimer le paramètre $a = \frac{1}{\theta}$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a noté $\hat{a}_{\mathrm{MV}}$? Cet estimateur est-il sans biais et convergent ?

3. (2pts) Déterminer la borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre a. L'estimateur $\widehat{a}_{\mathrm{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre a ?

<u>Ex1</u> (1)

1) La vraisemblance de $(x_1,\dots,x_n)$ s'écrit

$$L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left[\theta(1-\theta)^{x_i-1}\right] = \boxed{\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}}$$

et son logarithme est

$$\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = n\ln\theta + \left(\sum x_i - n\right)\ln(1-\theta)$$

dont on peut étudier les variations

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \geq 0 \iff \frac{n}{\theta} - \frac{\sum x_i - n}{1-\theta} \geq 0$$

Puisque $\theta \in]0,1[$, on a $\theta > 0$ et $1-\theta > 0$ d'où en multipliant par $\theta(1-\theta)$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \geq 0 \iff n(1-\theta) - \theta\left(\sum x_i - n\right) \geq 0 \iff \boxed{\theta \leq \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}}}$$

avec $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$

On a donc le tableau de variations suivant

θ	0		$\frac{1}{\bar{x}}$		1
$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$		$+$	0	$-$	
$\ln L$		$\nearrow$		$\searrow$	

ce qui montre que $\theta = \frac{1}{\bar{x}}$ est le maximum global unique de la log vraisemblance et donc de la vraisemblance.

2) L'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est asymptotiquement sans biais, convergent et asymptotiquement efficace. Par contre, l'étude des propriétés de $\hat{\theta}_{MV}$ pour n fini est délicate. En utilisant le principe d'invariance fonctionnelle, on obtient

$$\hat{a}_{MV} = \frac{1}{\hat{\theta}_{MV}} = \bar{X} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}$$

Les propriétés de cet estimateur sont simples à étudier puisque

$$E[\hat{a}_{MV}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \underbrace{E(X_i)}_{\frac{1}{\theta} = a} = a \Rightarrow \hat{a}_{MV} \text{ non biaisé}$$

$$Var[\hat{a}_{MV}] \underset{X_1,\dots,X_n \text{ ind}}{=} \frac{Var(X_i)}{n} = \frac{1-\theta}{n\theta^2} = \frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{n}{a^2}} = \boxed{\frac{a(a-1)}{n}}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Biais}(\hat{a}_{MV}) = 0 \\ Var[\hat{a}_{MV}] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right|$ $\Rightarrow$ donc l'estimateur $\hat{a}_{MV}$ est <u>convergent</u>

3) Efficacité ②

La borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé de a est

$$BCR = \frac{[1+b'(a)]^2}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right]} = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right]}$$

La vraisemblance peut se réécrire en fonction de a de la manière suivante

$$L(x_1,\dots,x_n; a) = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{\sum x_i - n}$$

D'où

$$\ln L = -n\ln a + \left(\sum x_i - n\right)\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{-n}{a} + \frac{\sum x_i - n}{1-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{-n}{a} + \frac{\sum x_i - n}{a^2 - a}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = \frac{n}{a^2} + \left(\sum x_i - n\right)\left[\frac{-(2a-1)}{a^2(a-1)^2}\right]$$

Mais $E\left[\sum X_i - n\right] = nE[X_i] - n = na - n = n(a-1)$, d'où

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right] = \frac{n}{a^2} + \frac{(1-2a)n}{a^2(a-1)} = \frac{n}{a^2(a-1)}\left[a - \cancel{1} + \cancel{1} - 2a\right] = \frac{-n}{a(a-1)}$$

d'où la borne $\boxed{BCR = \frac{a(a-1)}{n}}$

On en déduit que l'estimateur $\hat{a}_{MV}$ est l'estimateur efficace de a

4) D'après la loi de Bayes, on a

$$p(\theta|x_1,\dots,x_n) \propto p(x_1,\dots,x_n|\theta)\, p(\theta)$$

$$\propto \theta^n (1-\theta)^{\sum x_i - n} \times \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

$$\propto \theta^{n+\alpha-1}(1-\theta)^{\sum x_i + \beta - n - 1}$$

C'est une loi beta $\boxed{B\left(n+\alpha, \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta - n\right)}$

L'estimateur MAP maximise la loi a posteriori et vérifie donc

$$\frac{\partial p(\theta|x_1,\dots,x_n)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \ln p(\theta|x_1\dots x_n)}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left[(n+\alpha-1)\ln\theta + \left(\sum x_i + \beta - n - 1\right)\ln(1-\theta)\right] = 0$$

d'où $\quad \frac{n+\alpha-1}{\theta} - \frac{\sum x_i + \beta - n - 1}{1-\theta} = 0$

Exercice 1 **de révision**
(corrections sur page perso, examen MFEE année 2021-2022)

Un ensemble de n votants s'exprime pour 3 candidats dont deux d'entre eux ont la même probabilité θ d'être élus. La vraisemblance associée à ce modèle statistique est définie par une loi multinomiale d'expression $L(n_1, n_2, n_3; \theta) = P[N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3] = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$ où N_i est la variable aléatoire associée au nombre de voix obtenues pour le $i$ème candidat (avec $n_1 + n_2 + n_3 = n$) et $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) = (\theta, \theta, 1 - 2\theta)$ regroupe les probabilités que chaque candidat reçoive une voix, qui dépend d'un unique paramètre inconnu $\theta \in]0, 1/2[$. On admettra que pour un tel modèle statistique, la loi marginale de N_i est une loi binomiale $B(n, p_i)$ de moyenne $E[N_i] = np_i$ et de variance $\text{var}(N_i) = np_i(1 - p_i)$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ en utilisant la vraisemblance $L(n_1, n_2, n_3; \theta)$ et montrer qu'il ne dépend que de n et de N_3 (on prendra soin de vérifier que cette vraisemblance admet un unique maximum global).

2. Déterminer la moyenne et la variance de l'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$. Est-il un estimateur sans biais et convergent du paramètre θ ?

3. L'estimateur $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre θ ?

Exercice 2 **de révision**
(corrections sur page perso, examen MFEE année 2018-2019)

On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ suivant la même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2)$ et m variables aléatoires $Y_1, ..., Y_m$ suivant la même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma_2^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu et σ_1^2, σ_2^2 sont deux paramètres connus. On supposera de plus que les vecteurs $(X_1, ..., X_n)^T$ et $(Y_1, ..., Y_m)^T$ sont indépendants. Une situation pratique dans laquelle on peut avoir ces deux ensembles d'observations $(X_1, ..., X_n)^T$ et $(Y_1, ..., Y_m)^T$ correspond par exemple au cas où $(X_1, ..., X_n)^T$ sont obtenues par un premier capteur dont l'incertitude dépend de la variance σ_1^2 et où $(Y_1, ..., Y_m)^T$ sont obtenues par un second capteur dont l'incertitude dépend de la variance σ_2^2. L'objectif de cet exercice est d'étudier des estimateurs de μ basés sur les vecteurs $(X_1, ..., X_n)^T$ et $(Y_1, ..., Y_m)^T$.

1. On appelle vraisemblance conjointe de ces deux ensembles d'observations le produit des vraisemblances des deux échantillons $(X_1, ..., X_n)^T$ et $(Y_1, ..., Y_m)^T$ notée $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \mu)$ avec $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_m)$. Montrer que cette vraisemblance admet un unique maximum global pour une valeur de μ que l'on déterminera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance (conjointe) du paramètre μ noté $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ en fonction des variables X_i et Y_j et des paramètres σ_1^2 et σ_2^2.

2. Montrer que
$$\widehat{\mu}_{\text{MV}} = \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) \bar{Y}$$
avec $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$, et où $\alpha \in]0, 1[$ est un paramètre qu'on exprimera en fonction de n, m, σ_1^2 et σ_2^2. L'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est-il sans biais ? Déterminer la variance de $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ et montrer qu'elle tend vers 0 lorsque $n = m$ et que n tend vers l'infini.

3. Déterminer la borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé du paramètre μ à partir de l'observation des variables $(X_1, ..., X_n)^T$ et $(Y_1, ..., Y_m)^T$. L'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est-il l'estimateur efficace du paramètre μ ?

4. En comparant les expressions des bornes de Cramér-Rao pour $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ et pour $\sigma_1^2 = 2\sigma_2^2 = \sigma^2$, déterminer quelle situation est la plus favorable pour l'estimation du paramètre μ.