Tutorat #1 du 7/04/2026

- $L(x_1, \dots, x_n ; \theta) \to \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta)$

  $\to \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i ; \theta]$

- $E[\hat{\theta}] = \theta$ ($\hat{\theta}$ est un estimateur non biaisé)

  $Var(\hat{\theta}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ($\hat{\theta}$ est convergent)

  Borne de Cramér-Rao?

Rappel

$$E(aX + b] = a\,E[X] + b$$

$$Var(aX + b) = a^2\,Var X$$

Borne de Cramér-Rao pour un estimateur non biaisé

$$\frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_n ; \theta)}{\partial \theta^2}\right]}$$

$$\frac{1}{-E\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\underbrace{\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n ; \theta)}{\partial \theta}}\right]\right]}$$

Rappel : si $Y$ et $Z$ sont indépendantes, alors

$$Var(Y + Z) = Var Y + Var Z$$

donc si $X_1, \dots, X_n$ sont ind alors $Var(\sum X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

$\boxed{\text{Tutorat \#2}}$

$$f(x_i|b) = \frac{b\,a^b}{x_i^{\,b+1}} \qquad\qquad f(x_i\,;b)$$

$$f(b) = b^{V-1}\exp\left(-\frac{Vb}{2}\right)$$

$$\underbrace{\text{vraisemblance} \quad \left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b\,a^b}{x_i^{\,b+1}}\right)\right] \times f(b)}_{\text{loi a posteriori}}$$

$$\underset{\text{Notation}}{f(b|x_1\ldots x_n)} \underset{\text{proportionnel}}{\propto} \underbrace{f(b)}_{\underbrace{b^{V-1}}\underbrace{\exp\left(-\frac{Vb}{2}\right)}} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b\,a^b}{x_i^{\,b+1}}\right)$$

$$\ln f(b|x_1\ldots x_n) = \underbrace{(V-1)\ln b - \frac{Vb}{2}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\ln b + \underbrace{b\ln a} - (b+1)\ln x_i\right)$$

BAYES

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$A$ : $b$ ; $B$ : $x_1\ldots x_n$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial b} = 0 \iff \frac{V-1}{b} - \frac{V}{2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b} + \ln a - \ln x_i\right) = 0$$

$$\frac{V-1}{b} + \frac{n}{b} - \frac{V}{2} + n\ln a - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

$$\frac{V-1+n}{b} = \frac{V}{2} - n\ln a + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\boxed{b = \frac{n+V-1}{\frac{V}{2} - n\ln a + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i}}$$

Autre exemple

$$\boxed{f(x_i;\theta) = \frac{2x_i}{\theta}\exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)}$$

Hier, on a vu "maximum de vraisemblance"

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta}\exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)$$

$$\ln \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln 2 + \ln x_i - \ln\theta - \frac{x_i^2}{\theta}$$

Aujourd'hui estimateur MAP

$$f(\theta)\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \boxed{\frac{a}{\theta^2}e^{-\frac{a}{\theta}} \times \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{2x_i}{\theta}\exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)\right)}$$

logarithme

$$\ln a - 2\ln\theta - \frac{a}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\left(\ln 2 + \ln x_i - \ln\theta - \frac{x_i^2}{\theta}\right)$$

Dérivée du logarithme

$$0 - \frac{2}{\theta} + \frac{a}{\theta^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(0 + 0 - \frac{1}{\theta} + \frac{x_i^2}{\theta^2}\right) = 0$$

$$-\frac{2}{\theta} + \frac{a}{\theta^2} - \frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

on $\otimes$ par $\theta^2$

$$-2\theta + a - n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\theta(n+2) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

donc $\boxed{\theta = \dfrac{a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n+2}}$

$$\boxed{\hat{\theta}_{MAP} = \frac{a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n+2}}$$

hier, on avait vu $\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\,\hat{\theta}_{MV}$

Comparaison des estimateurs

$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{a + n\,\hat{\theta}_{MV}}{n+2}$$

$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{\hat{\theta}_{MV} + \frac{a}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$$

$\boxed{\text{Estimateur MMSE}}$ (minimum mean square error)

Définition $\boxed{\hat{\theta}_{MMSE} = E[\,\theta \mid x_1, \dots, x_n]}$ moyenne de la loi de $\theta \mid x_1, \dots, x_n$

$$p(\theta \mid x_1 \dots x_n) \underset{\text{BAYES}}{=} \frac{p(x_1 \dots x_n \mid \theta)\, p(\theta)}{p(x_1 \dots x_n)}$$

$$\propto p(x_1 \dots x_n \mid \theta)\, p(\theta)$$

$\boxed{\text{Quelle est cette loi ?}}$

Examen de l'année dernière

$$e^{b \ln a}$$

$$p(b \mid x_1 .. x_n) \propto b^{V-1} \exp\left(-\frac{Vb}{2}\right) \times \left( \prod_{i=1}^{n} \frac{b\, a^b}{x_i^{b+1}} \right)$$

$x_i^b \quad x_i \qquad \times \frac{1}{\prod x_i}$

$$\propto b^{V-1} \exp\left(-\frac{Vb}{2}\right) \times b^n \times \exp(n b \ln a) \times \exp\left(-b \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$$

$e^{b \ln x_i}$

Rq $\boxed{\prod_{i=1}^{n} e^{b \ln a} = e^{b \ln a} \times \dots \times e^{b \ln a} = \exp(n b \ln a)}$

$$\prod_{i=1}^{n} e^{b \ln x_i} = e^{b \ln x_1} \times \dots \times e^{b \ln x_n} = \exp\left( b \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \right)$$

$$\frac{1}{e^u} = e^{-u}$$

$$\boxed{p(b|x_1 \dots x_n) \propto b^{n+v-1} \exp\left(\left(-\frac{v}{2} + n \ln a - \sum \ln x_i\right) b\right)}$$

Loi gamma (Table) $\quad p(b) = b^{v-1} \exp(-b\theta)$

$\Gamma(v, \theta)$

$$b|x_1 \dots x_n \sim \Gamma\left(v+n, \frac{v}{2} - n \ln a + \sum \ln x_i\right)$$

$$\hat{\theta}_{MMSE} = E[b|x_1 \dots x_n]$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{MMSE} = \frac{v+n}{\frac{v}{2} - n \ln a + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}}$$

**Examen 2024/2025**

$$f(\theta) \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{a}{\theta^2} e^{-\frac{a}{\theta}} \times \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2x_i}{\theta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)\right)$$

$$\propto \frac{1}{\theta^{2+n}} \exp\left[-\frac{1}{\theta}\left(a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\right]$$

c'est une loi Inverse Gamma $\quad IG\left(n+1, a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$

$n+2-1$

$\hat{\theta}_{MMSE}$ = moyenne de cette loi

$$= \boxed{\frac{a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$