$\boxed{\text{Tutorat 3 du 15/04/2026}}$

$$f(x_i;\lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \frac{1}{x_i^{r+1}} \exp\left(-\frac{\lambda}{x_i}\right)$$

H_0 $\lambda = \lambda_0$

H_1 $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$

$\lambda_1 > \lambda_0$ donc $\boxed{\lambda_0 - \lambda_1 < 0}$

Neyman Pearson

Rejet de H_0 si $\dfrac{L(x_1,\dots,x_n;\lambda_1)}{L(x_1,\dots,x_n;\lambda_0)} > \text{Seuil}_1$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_1^r}{\cancel{\Gamma(r)}} \cancel{\frac{1}{x_i^{r+1}}} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{x_i}\right)}{\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_0^r}{\cancel{\Gamma(r)}} \cancel{\frac{1}{x_i^{r+1}}} \exp\left(-\frac{\lambda_0}{x_i}\right)} > \text{Seuil}_1$$

Rejet de H_0 si (on prend le log)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(r \ln \lambda_1 - \frac{\lambda_1}{x_i} - r \ln \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{x_i}\right) > \text{Seuil}_2$$

$$\underbrace{(\lambda_0 - \lambda_1)}_{<0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} > \text{Seuil}_3$$

on conclut : $\boxed{\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} < S_\alpha}$

Statistique de test $\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

$\boxed{\text{Seuil } S_\alpha}$?

$$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}]$$
$$= P(T_n < S_\alpha \mid \lambda = \lambda_0]$$
$$= P\left(\frac{T_n - \frac{nr}{\lambda_0}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}}} < \frac{S_\alpha - \frac{nr}{\lambda_0}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}}}\right] = \boxed{G\left(\frac{S_\alpha - \frac{nr}{\lambda_0}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}}}\right)}$$

$\sim \mathcal{N}(0,1)$

Rappel : $\boxed{\text{si } T_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{nr}{\lambda_0}, \frac{nr}{\lambda_0^2}\right) \text{ alors } \frac{T_n - \frac{nr}{\lambda_0}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)}$

seuil ?

$$G^{-1}(\alpha) = \frac{s_\alpha - \frac{nr}{\lambda_0}}{\sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}}}$$

donc $\boxed{s_\alpha = \sqrt{\frac{nr}{\lambda_0^2}}\; G^{-1}(\alpha) + \frac{nr}{\lambda_0}}$

Probabilité de détection ?

$\boxed{\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid \underbrace{H_0 \text{ vraie}}_{\lambda = \lambda_0}]}$ PFA

$\beta = P[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}]$ PND probabilité de non détection

$\pi = PD = 1 - \beta$

$= 1 - P[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}]$

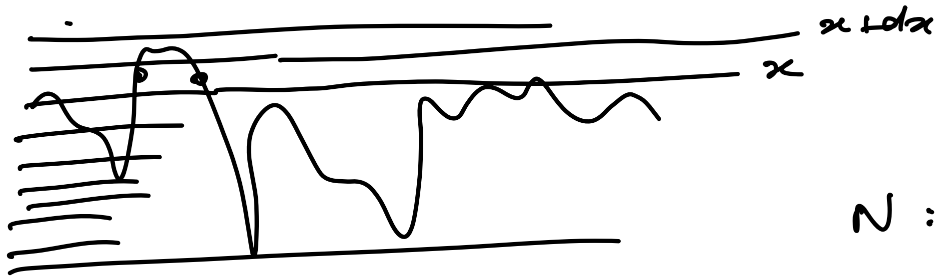
$\boxed{\pi = P[\text{Rejeter } H_0 \mid \underbrace{H_1 \text{ vraie}}_{\lambda = \lambda_1}]}$

Pour avoir π, on remplace dans α, λ_0 par λ_1 !!

(pas de calcul à refaire)

Tutorat #4

$$p(x)\,dx \approx P[\,X \in]x, x+dx[\,] \approx \frac{N_x}{N}$$

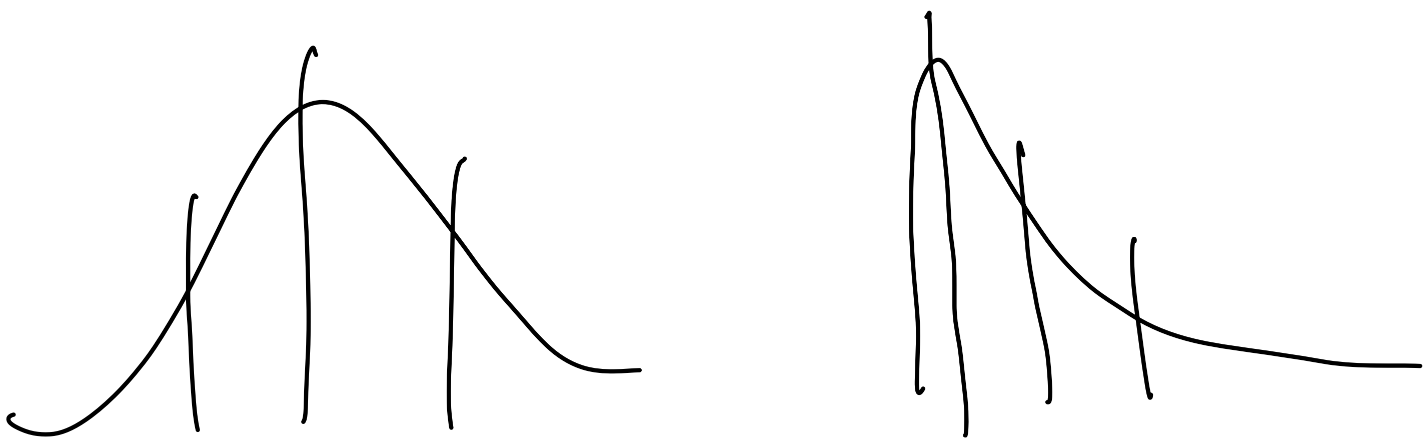


N : nombre total de points

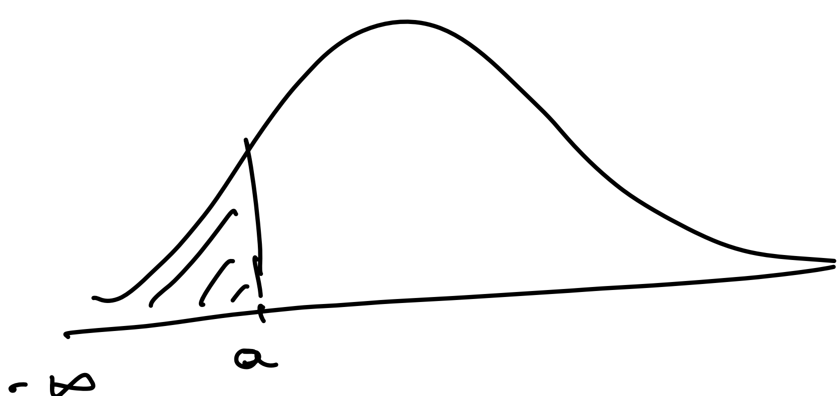
N_x : nombre de points $\in]x, x+dx[$

Histogramme

$$\boxed{p(x) \approx \frac{N_x}{N\,dx}}$$



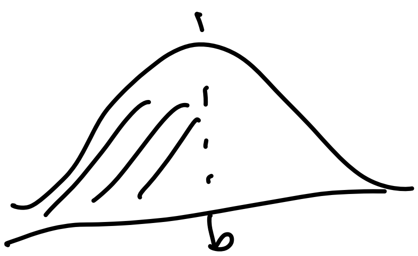
Construction des classes (intervalles)



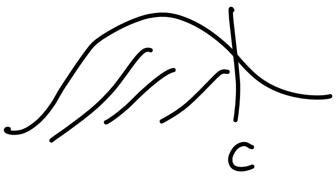
a? $P[\,X \in]-\infty, a[\,] = \frac{1}{4}$

$$F_{N(1,4)}[a] = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{a = F^{-1}_{N(1,4)}\left(\frac{1}{4}\right)} \approx -0,34$$



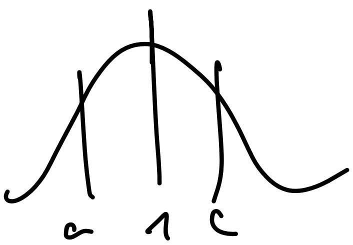
$$b = F^{-1}_{N(1,4)}\left(\frac{1}{2}\right) = m = \boxed{1}$$



$$c = F^{-1}_{N(1,4)}\left(\frac{3}{4}\right)$$

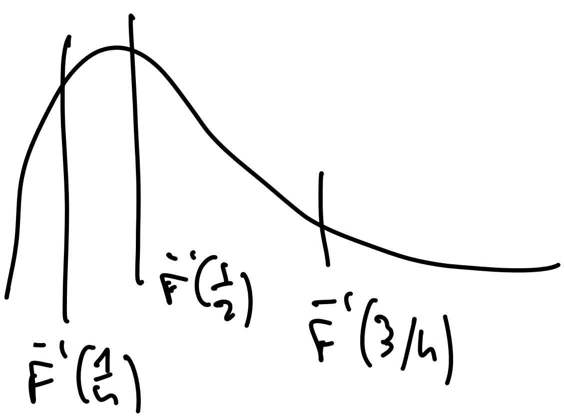
Rq $c - 1 = 1 - a$

donc $\boxed{c = 2 - a} \approx 2,34$



MATLAB $K = \sqrt{n}$ — nbre de points

nbre de classes



Rq : (H0) $x_1, \dots, x_n$ suivent la loi normale (moyenne et variance non spécifiées)

(H1) non H0

On estime m et σ^2 avec la méthode du maximum de vraisemblance

$$\hat{m}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{m}_{MV}\right)^2$$

Détermination du seuil

Test du χ^2 : on rejette H0 si $\phi = \dfrac{\sum (Z_k - np_k)^2}{np_k} > S_\alpha$

On se fixe $\underset{(PFA)}{\alpha} = P[\text{Rejeter H0} \mid \text{H0 vraie}]$

$$= P[\phi > S_\alpha \mid x_1, \dots, x_n \text{ suivent la loi normale}]$$

$$= 1 - P[\phi \leq S_\alpha \mid x_1, \dots, x_n \text{ suivent la loi normale}]$$

$$\alpha = 1 - F_{\chi^2}(S_\alpha)$$

$K - 1 - n_p$

$$1 - \alpha = F_{\chi^2}(S_\alpha)$$

$$\boxed{S_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{?}}(1 - \alpha)}$$

$K - 1 - n_p$

Paramètre de la loi du χ^2 : $\underbrace{K}_{\text{nbre de classes}} - 1 - \underbrace{n_p}_{\text{nombre de paramètres estimés}}$

Ex1 H_0 $X_i \sim N(1,4)$ $n_p = 0$ $\underset{\text{4 classes}}{\underset{\uparrow}{k}} - 1 - n_p = 3$

Ex2 H_0 $X_i \sim N(m, \sigma^2)$ $n_p = 2$ $k - 1 - n_p = 1$

$\hat{m}$ $\hat{\sigma}^2$