Exercice 1 : Estimation

Partie 1 : μ inconnu et λ connu

1) La vraisemblance de $(x_1, ..., x_n)$ est définie par

$$\begin{aligned}
L(x_1, ..., x_n; \mu, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \lambda), \\
&= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x_i^3}} \exp\left[-\frac{\lambda}{2\mu^2 x_i}(x_i - \mu)^2\right] I_{\mathbb{R}^+}(x_i), \\
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{3/2}} \exp\left[-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right] \prod_{i=1}^{n} I_{\mathbb{R}^+}(x_i).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\ln L(x_1, ..., x_n; \mu, \lambda) = \frac{n}{2}\ln(\lambda) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - \frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}.$$

En étudiant le signe de $\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n;\mu,\lambda)}{\partial \mu}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(x_1, ..., x_n; \mu, \lambda)}{\partial \mu} \geq 0 &\iff \frac{\lambda}{2}\left[\frac{2}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i} + \frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2(x_i-\mu)}{x_i}\right] \geq 0, \\
&\iff \frac{\lambda}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2 + \mu x_i - \mu^2}{x_i} \geq 0, \\
&\iff \frac{\lambda}{\mu^3}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] \geq 0,.
\end{aligned}$$

La vraisemblance possède donc un maximum global unique obtenu pour $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ d'où

$$\widehat{\mu}_{\text{MV}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

2) Le biais de l'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est défini par

$$\text{Biais}(\widehat{\mu}_{\text{MV}}) = E\left[\widehat{\mu}_{\text{MV}}\right] - \mu,$$

avec

$$E\left[\widehat{\mu}_{\text{MV}}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

L'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est donc un estimateur non biaisé de μ. La variance de l'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left[\widehat{\mu}_{\text{MV}}\right] &= \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right], \\
&= \frac{1}{n}\operatorname{var}\left(X_1\right), \\
&= \frac{\mu^3}{n\lambda}.
\end{aligned}$$

L'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est un estimateur non biaisé de μ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}\left[\widehat{\mu}_{\text{MV}}\right] = 0$$

donc l'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est convergent (comme tout estimateur du maximum de vraisemblance).
3) La borne de Cramer-Rao pour les estimateurs non biaisés du paramètre μ est définie par

$$\begin{aligned}
\operatorname{BCR}(\mu) &= \frac{-1}{E\left[\frac{\partial \ln L(X_1,\ldots,X_n;\mu,\lambda)}{\partial \mu^2}\right]}, \\
&= \frac{-1}{E\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{\lambda}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n\lambda}{\mu^2}\right]\right]}, \\
&= \frac{-1}{E\left[\frac{-3\lambda}{\mu 4}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{2n\lambda}{\mu^3}\right]} \\
&= \frac{-1}{-\frac{n\lambda}{\mu^3}} = \frac{\mu^3}{n\lambda}.
\end{aligned}$$

Puisque $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est un estimateur non biaisé de μ et que $\operatorname{var}[\widehat{\mu}_{\text{MV}}] = \operatorname{BCR}(\mu)$, l'estimateur $\widehat{\mu}_{\text{MV}}$ est l'estimateur efficace de μ.

Partie 2 : μ connu et λ inconnu

1)En étudiant le signe de $\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;\mu,\lambda)}{\partial \lambda}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;\mu,\lambda)}{\partial \lambda} &\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i} \geq 0, \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{n\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}, \\
&\Longleftrightarrow \lambda \leq n\mu^2\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right]^{-1}.
\end{aligned}$$

La vraisemblance possède donc un maximum global unique obtenu pour

$$\lambda = n\mu^2\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right]^{-1}$$

d'où

$$\widehat{\lambda}_{\text{MV}} = n\mu^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{X_i}\right]^{-1}.$$

2) On suppose désormais qu'on dispose d'une information a priori sur le paramètre λ résumée dans la loi gamma $\Gamma(a,b)$ de densité

$$f(\lambda|\, a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda b} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$$

- La loi a posteriori de $\lambda|\, x_1,...,x_n$ vérifie

$$\begin{aligned} f(\lambda|\, x_1,...,x_n) &\propto f(x_1,...,x_n|\,\lambda)\, f(\lambda) \\ &\propto \lambda^{n/2} \exp\left[-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right] \lambda^{a-1} e^{-\lambda b} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda) \\ &\propto \lambda^{\frac{n}{2}+a-1} \exp\left\{-\lambda\left[\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}+b\right]\right\} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda) \end{aligned}$$

  Cette densité est la densité d'une loi gamma

$$\lambda|\, x_1,...,x_n \sim \Gamma\left(a+\frac{n}{2}, \frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}+b\right)$$

- L'estimateur du maximum a posteriori du paramètre λ noté $\widehat{\lambda}_{\text{MAP}}$ est obtenu en maximisant le logarithme de la loi a posteriori $f(\lambda|\, x_1,...,x_n)$. Mais

$$\ln\left[f(\lambda|\, x_1,...,x_n)\right] = C + \left(\frac{n}{2}+a-1\right)\ln\lambda - \lambda\left[\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}+b\right]$$

  d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln\left[f(\lambda|\, x_1,...,x_n)\right]}{\partial\lambda} &\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{\frac{n}{2}+a-1}{\lambda} \geq \frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}+b \\ &\Longleftrightarrow \lambda \leq \frac{\frac{n}{2}+a-1}{\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}+b} \end{aligned}$$

  La loi a posteriori $f(\lambda|\, x_1,...,x_n)$ possède donc un unique maximum global, d'où

$$\widehat{\lambda}_{\text{MAP}} = \frac{\frac{n}{2}+a-1}{\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{X_i}+b}$$

  On peut exprimer $\widehat{\lambda}_{\text{MAP}}$ en fonction de$\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ puisque

$$\widehat{\lambda}_{\text{MV}} = n\mu^2\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{X_i}\right]^{-1} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{X_i} = \frac{n\mu^2}{\widehat{\lambda}_{\text{MV}}}$$

On a alors

$$\widehat{\lambda}_{\text{MAP}} = \frac{\frac{n}{2}+a-1}{\frac{1}{2\mu^2}\frac{n\mu^2}{\widehat{\lambda}_{\text{MV}}}+b} = \frac{1+\frac{2(a-1)}{n}}{\frac{1}{\widehat{\lambda}_{\text{MV}}}+\frac{2b}{n}}$$

L'estimateur $\widehat{\lambda}_{\text{MAP}}$ se comporte donc $\widehat{\lambda}_{\text{MV}}$ comme lorsque $n \to \infty$.

- L'estimateur MMSE du paramètre λ est défini par

$$\widehat{\lambda}_{\text{MMSE}} = E\left[\lambda | X_1, ..., X_n\right]$$

En utilisant le rappel concernant la moyenne d'une loi gamma, on a

$$\widehat{\lambda}_{\text{MMSE}} = \frac{a+\frac{n}{2}}{\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{X_i}+b} = \frac{a+\frac{n}{2}}{\frac{1}{2\mu^2}\frac{n\mu^2}{\widehat{\lambda}_{\text{MV}}}+b}$$

soit

$$\widehat{\lambda}_{\text{MMSE}} = \frac{1+\frac{2a}{n}}{\frac{1}{\widehat{\lambda}_{\text{MV}}}+\frac{2b}{n}}$$

Partie 3 : μ inconnu et λ inconnu

1) L'estimateur du maximum de vraisemblance du vecteur $\theta = (\mu, \lambda)$ s'obtient à l'aide des relations

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;\mu,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;\mu,\lambda)}{\partial \mu} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \\ \lambda = n\mu^2\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right]^{-1} \end{array}\right.$$

En remplaçant μ par $\overline{x}$ dans la deuxième égalité, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda &= n\overline{x}^2\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2-2\overline{x}x_i+\overline{x}^2}{x_i}\right]^{-1} \\ &= n\overline{x}^2\left[\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\overline{x} + \overline{x}^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right]^{-1} \\ &= \frac{n\overline{x}^2}{-n\overline{x}+\overline{x}^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-\frac{1}{\overline{x}}\right]^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit que l'estimateur du maximum de vraisemblance du vecteur θ est

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mu}_{\text{MV}} \\ \widehat{\lambda}_{\text{MV}} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{\text{MV}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \overline{X} \\ \widehat{\lambda}_{\text{MV}} &= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}-\frac{1}{\overline{X}}\right]^{-1} \end{aligned}$$

2) La matrice d'information de Fisher associée au vecteur θ est définie par

$$M = \begin{pmatrix} E\left[-\frac{\partial \ln L(X_1,...,X_n;\mu,\lambda)}{\partial \mu^2}\right] & E\left[-\frac{\partial \ln L(X_1,...,X_n;\mu,\lambda)}{\partial \mu \partial \lambda}\right] \\ E\left[-\frac{\partial \ln L(X_1,...,X_n;\mu,\lambda)}{\partial \mu \partial \lambda}\right] & E\left[-\frac{\partial \ln L(X_1,...,X_n;\mu,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right] \end{pmatrix}$$

Le premier terme diagonal de cette matrice a déjà été déterminé

$$E\left[-\frac{\partial \ln L(X_1, ..., X_n; \mu, \lambda)}{\partial \mu^2}\right] = \frac{n\lambda}{\mu^3}$$

L'autre terme diagonal s'écrit

$$E\left[-\frac{\partial \ln L(X_1, ..., X_n; \mu, \lambda)}{\partial \lambda^2}\right] = -E\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{n}{2\lambda}\right)\right] = \frac{n}{2\lambda^2}$$

Le terme hors-diagonal est

$$\begin{aligned} E\left[-\frac{\partial \ln L(X_1, ..., X_n; \mu, \lambda)}{\partial \mu \partial \lambda}\right] &= E\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\frac{\lambda}{\mu^3}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right]\right)\right] \\ &= E\left[\frac{-1}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{\mu^2}\right] \\ &= \frac{-1}{\mu^3}(n\mu) + \frac{n}{\mu^2} = 0 \end{aligned}$$

La matrice d'information de Fisher est donc diagonale et s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} \frac{n\lambda}{\mu^3} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\lambda^2} \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice d'information de Fisher est

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mu^3}{n\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^2}{n} \end{pmatrix}$$

Les variances d'estimateurs non biaisés de μ et λ vérifient donc

$$\begin{aligned} \operatorname{var}[\widehat{\mu}] &\geq \frac{\mu^3}{n\lambda} \\ \operatorname{var}\left[\widehat{\lambda}\right] &\geq \frac{2\lambda^2}{n} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Test de Neyman-Pearson

1) Le test de Neyman-Pearson est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si} \quad \frac{L(x_1,...,x_n;\mu_1,\lambda)}{L(x_1,...,x_n;\mu_0,\lambda)} > S_\alpha.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{L(x_1,...,x_n;\mu,\lambda_1)}{L(x_1,...,x_n;\mu,\lambda_0)} &> S_\alpha \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i^{3/2}}\exp\left[-\frac{\lambda}{2\mu_1^2}\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu_1)^2}{x_i}\right]\prod_{i=1}^n I_{\mathbb{R}^+}(x_i)}{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i^{3/2}}\exp\left[-\frac{\lambda}{2\mu_0^2}\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu_0)^2}{x_i}\right]\prod_{i=1}^n I_{\mathbb{R}^+}(x_i)} > S_\alpha,\\
&\Leftrightarrow \exp\left[-\frac{\lambda}{2\mu_1^2}\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu_1)^2}{x_i}+\frac{\lambda}{2\mu_0^2}\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu_{10})^2}{x_i}\right] > S_\alpha,\\
&\Leftrightarrow \frac{-1}{\mu_1^2}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2-2\mu_1x_i+\mu_1^2}{x_i}+\frac{1}{\mu_0^2}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2-2\mu_0x_i+\mu_0^2}{x_i} > \nu_\alpha,\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\mu_0^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)\sum_{i=1}^n x_i > t_\alpha
\end{aligned}$$

Pour $\mu_1 > \mu_0$, on en déduit le test équivalent

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si} \quad \sum_{i=1}^n X_i > K_\alpha.$$

La statistique du test de Neyman-Pearson est donc

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

La région critique de ce test est définie par

$$\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i > K_\alpha\right\}.$$

2) Le risque de première espèce α est défini par

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\left[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}\right],\\
&= P\left[T_n > K_\alpha \mid \mu=\mu_0\right],\\
&= P\left[\left. Y_0 = \frac{\lambda}{\mu_0^2}\sum_{i=1}^n X_i > \frac{\lambda}{\mu_0^2}K_\alpha \,\right|\, Y_0 \sim W\left(\frac{n\lambda}{\mu_0},\frac{n^2\lambda^2}{\mu_0^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

La densité de la loi $W\left(\frac{n\lambda}{\mu_0},\frac{n^2\lambda^2}{\mu_0^2}\right)$ s'écrit

$$g_0(y) = \frac{n\lambda}{\mu_0}\sqrt{\frac{1}{2\pi y^3}}\exp\left[-\frac{1}{2y}\left(y-\frac{n\lambda}{\mu_0}\right)^2\right]$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\left[\left. Y_0 > \frac{\lambda}{\mu_0^2}K_\alpha \right| Y_0 \sim W\left(\frac{n\lambda}{\mu_0}, \frac{n^2\lambda^2}{\mu_0^2}\right)\right], \\
&= \int_{\frac{\lambda K_\alpha}{\mu_0^2}}^{\infty} g_0(y)dy, \\
&= G_{a_0}\left(\frac{\lambda K_\alpha}{\mu_0^2}\right) \text{ avec } a_0 = \frac{n\lambda}{\mu_0}.
\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}
\beta &= P\left[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}\right], \\
&= P\left[T_n \leq K_\alpha \mid \mu = \mu_1\right], \\
&= 1 - P\left[T_n > K_\alpha \,|\mu = \mu_1\right], \\
&= 1 - P\left[\left. Y_1 = \frac{\lambda}{\mu_1^2}\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{\lambda}{\mu_1^2}K_\alpha \right| Y_1 \sim W\left(\frac{n\lambda}{\mu_1}, \frac{n^2\lambda^2}{\mu_1^2}\right)\right], \\
&= 1 - G_{a_1}\left(\frac{\lambda K_\alpha}{\mu_1^2}\right) \text{ avec } a_1 = \frac{n\lambda}{\mu_1}.
\end{aligned}$$

Remarque : démonstration du résultat admis

La fonction caractéristique de Y s'écrit

$$\begin{aligned}
\phi_Y(t) &= E\left[\exp\left(it\frac{\lambda}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left(it\frac{\lambda}{\mu^2}X_i\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1-2it}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{n\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1-2it}\right)\right]
\end{aligned}$$

Si on remplace $\mu' = \frac{n\lambda}{\mu}$ et $\lambda' = \frac{n^2\lambda^2}{\mu^2}$ dans l'expression de la fonction caractéristique d'une loi de Wald $W\left(\mu', \lambda'\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\phi_{\mu',\lambda'}\left(t\right) &= \exp\left[\frac{\lambda'}{\mu'}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2i\mu'^2 t}{\lambda'}}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{n\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1-2it}\right)\right]
\end{aligned}$$

qui est identique à la fonction caractéristique de Y. On en conclut

$$Y = \frac{\lambda}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim W\left(\mu', \lambda'\right)$$

Exercice 3 : Test d'ajustement

On dispose de n observations $x_1, ..., x_n$ générées suivant la loi de Wald et on se propose de tester si on peut approcher la loi de Wald par une loi normale. Pour ce, on centre et on réduit les variables x_i en formant

$$y_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x} \text{ avec } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } s_x = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right]^{1/2}$$

et on désire effectuer un test du χ^2 (avec 4 classes) pour tester si la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est adaptée aux observations y_i. Répondre aux question suivantes et justifier vos réponses

- Comment doit-on choisir les 4 classes ?

  Réponse : on doit choisir des classes équiprobables car si p_k est la probabilité d'appartenir à la classe C_k (calculée avec la loi à tester, i.e., ici la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$), on doit vérifier $np_k \geq 3$ ou 4 pour tout $k = 1, ..., 4$. En choisissant des classes équiprobables, on obtient des probabilités p_1, p_2, p_3 et p_4 maximales. En vertu de la symétrie de la loi normale, ces classes sont nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} C_1 &: \left]-\infty, -b\right[, \\ C_2 &: \left[-b, 0\right[, \\ C_3 &: \left[0, b\right[, \\ C_4 &: \left[b, \infty\right[. \end{aligned}$$

  On peut déterminer b de la façon suivante

$$\int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = F(b) = \frac{1}{4},$$

  où F est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ d'où

$$b = F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right).$$

- Quelle est la statistique ϕ utilisée pour le test du χ^2 ?

  Réponse : la statistique du test du χ^2 est

$$\phi = \sum_{i=1}^{4} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{4}\left(N_i - \frac{n}{4}\right)^2$$

  où N_i est le nombre d'observations y_k appartenant à la classe C_i et n le nombre total d'observations y_k.

- Donner la règle de décision.et préciser comment on détermine le seuil associé à cette décision en fonction du risque de première espèce α.

  Réponse : La régle de décision du test du χ^2 est

$$\text{Rejet de l'hypothèse } H_0 \text{ si } \phi > s_\alpha,$$

  avec

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}\right], \\ &= P\left[\phi > s_\alpha \mid H_0 \text{ vraie}\right]. \\ &= P\left[\phi > s_\alpha \mid \phi \sim \chi_3^2\right]. \end{aligned}$$

  On sait que ϕ est distribuée suivant une loi du χ^2_{K-1} sous l'hypothèse H_0, où $K = 4$ est le nombre de classes. Si $f_n(u)$ est la densité d'une loi du χ^2_n, on pose

$$\int_x^\infty f_n(u)du = F_n(x),$$

  et on obtient

$$\alpha = F_3\left(s_\alpha\right) \Longrightarrow s_\alpha = F_3^{-1}\left(\alpha\right).$$

- Que pensez vous du risque β associé à la décision ci-dessus ?

  Réponse : le risque β est défini par

$$\begin{aligned} \beta &= P\left[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}\right] \\ &= P\left[\phi \leq s_\alpha \mid H_1 \text{ vraie}\right] \end{aligned}$$

  Comme on ne connaît pas la loi de la statistique de test ϕ sous l'hypothèse H_1, on ne peut pas déterminer le risque β pour le test du χ^2.