Partiel de Statistique

Vendredi 13 Décembre 2002, 14h00-16h00

Exercice 1

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi exponentielle de densité

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\mathbb{R}^+}(x)$$

où λ est un paramètre inconnu et $I_{\mathbb{R}^+}(x)$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$.

1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ noté $\widehat{\lambda}_{MV}$ (on prendra soin d'établir un tableau de variation associé à la fonction à maximiser).

2) On suppose désormais que le paramètre λ est muni d'une loi a priori $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$. Déterminer l'estimateur MMSE et l'estimateur MAP du paramètre λ.

3) On s'intéresse maintenant à l'estimation de $P = \int_0^1 f(x;\lambda)dx$. Déterminer P en fonction de λ et en déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance de P noté $\widehat{P}_{MV}$.

4) On considère la statistique

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

avec

$$Y_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que T est un estimateur sans biais et convergent de P.

5) Donner la loi asymptotique de T issue de l'application du théorème de la limite centrale. En déduire qu'un intervalle de confiance pour le paramètre P avec un coefficient de confiance $\alpha = 0.95$ est de la forme $[P_1, P_2]$ où P_1 et P_2 sont les solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.

6) On espère améliorer les performances de T pour l'estimation de P à l'aide de la statistique

$$U(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i Y_i$$

où les coefficients ω_i sont des réels ≥ 0. Déterminer $E[U(\omega)]$ et en déduire un estimateur non biaisé de P de la forme $\widetilde{U}(\omega) = KU(\omega)$, où K est une constante que l'on déterminera. Déterminer la variance de $\widetilde{U}(\omega)$. En appliquant soigneusement l'inégalité de Cauchy Schwartz, montrer que

$$var\left[\widetilde{U}(\omega)\right] \geq var[T]$$

Rappel : on rappelle que l'inégalité de Cauchy Schwartz pour un produit scalaire $\langle U, V\rangle$ est

$$|\langle U, V\rangle|^2 \leq \langle U, U\rangle^2 \langle V, V\rangle^2$$

Exercice 2

On considère n observations $x_1, ..., x_n$ issues d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi exponentielle de densité
$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\mathbb{R}^+}(x)$$
où λ est un paramètre inconnu et $I_{\mathbb{R}^+}(x)$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$. On souhaite faire un test entre les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 \text{ (avec } \lambda_1 > \lambda_0) \end{cases} \tag{1}$$

1) Déterminer la statistique T et la région critique du test de Neyman-Pearson.
2) Montrer que $Y_i = 2\lambda X_i$ suit une loi du χ_2^2. Déterminer la fonction caractéristique de

$$U = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

et en déduire la loi de U.
3) Déterminer les courbes COR associées au problème (1) et représenter approximativement ces courbes pour plusieurs valeurs caractéristiques des paramètres λ_0 et λ_1 (on notera

$$\Phi_{2n}(x) = \int_x^{+\infty} f_{2n}(u)\, du$$

où $f_{2n}(u)$ est la densité d'une loi du χ_{2n}^2 et on notera $\Phi_{2n}^{-1}(x)$ son inverse).
4) Soit K le nombre de X_j supérieurs à $\frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}$. On accepte l'hypothèse H_0 lorsque $K > \mu_\alpha$.

- Déterminer la loi de K, sa moyenne et sa variance.
- Justifier le fait que l'on peut, pour n grand, approcher la loi de K par une loi normale dont on précisera les paramètres (on supposera que cette approximation est valable pour $n = 100$).
- A partir de $n = 100$ observations, on observe $K = 52$. Quelle décision prenez vous avec le risque $\alpha = 0.01$, $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1 = 2$?

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in \left]a, b\right[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $N(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in \left]0, 1\right[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

Loi Normale $N(0,1)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	0.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	0.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	0.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	0.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	0.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	0.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	0.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	0.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	0.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	0.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	0.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	0.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	0.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	0.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	0.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	0.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	0.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	0.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	0.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	0.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	0.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	0.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	0.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	0.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	0.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	0.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	0.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	0.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	0.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	0.9985	.9986	.9986